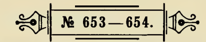
Второй серіи V-го семестра №5—6.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.


№ 653—654.

Опытъ обоснованія первыхъ теоремъ изъ курса школьной геометріи.

И. Гибша.

Вмѣсто предисловія.

Предлагая вниманію читателей настоящую статью, я рискую встрѣтить несочувствіе къ ней со стороны тѣхъ, которые являются противниками увлеченія строгими доказательствами въ курсѣ геометріи, излагаемомъ въ средней школѣ. И прежде всего, должно быть, я вызову возраженія со стороны уважаемаго учителя своего прив.-доц. В. Ф. Кагана, который неоднократно на страницахъ редактируемаго имъ „Вѣстника" высказывалъ ту мысль, что освободиться отъ интуиціи не удалось даже Гильберту (Hilbert) въ его „Grundlagen der Geometrie", и что нечего и думать о томъ, чтобы устранить интуицію изъ курса школьной геометріи, а потому совершенно безразлично, въ какой дозѣ вводить ее въ этотъ курсъ при преподаваніи. Исходя изъ этой точки зрѣнія, В. Ф. всегда указывалъ своимъ молодымъ ученикамъ на нецѣлесообразность ихъ попытокъ, направленныхъ къ полному освобожденію курса геометріи отъ интуиціи.

Между тѣмъ въ основу своего преподавательскаго credo я кладу завѣтъ другого моего учителя — проф. И. В. Слешинскаго, который стоялъ на той точкѣ зрѣнія, что, если нѣкоторое предложеніе не можетъ быть доказано вполнѣ строго, то его вовсе не слѣдуетъ доказывать, но въ случаѣ, если это предложеніе служитъ необходимымъ основаніемъ для дальнѣйшихъ выводовъ, слѣдуетъ ограничиться принятіемъ его на вѣру, съ тѣмъ, чтобы доказать его съ исчерпывающей строгостью тогда, когда позволятъ пройденный матеріалъ и развитіе учащихся.

Очевидно, что, если стать на почву этого принципа при преподаваніи геометріи въ средней школѣ, то придется вовсе отказаться отъ доказательства тѣхъ теоремъ, которыя несвободны отъ интуиціи. Но это привело бы къ необходимости принять на вѣру слишкомъ большое число теоремъ, среди которыхъ имѣется не мало истинъ, носящихъ далеко не очевидный характеръ. Неудобство такого положенія вещей съ дидактической точки зрѣнія ясно для всякаго. Весьма заманчивый выходъ изъ этого положенія состоитъ въ томъ, чтобы изложить въ средней школѣ строго-научную систему геометріи, вполнѣ свободную отъ интуиціи; но утопичность этой идеи слишкомъ ясна, чтобы о ней распространяться. Въ виду этого остается лишь одинъ путь, слѣдуя которому мы останемся вѣрны вышеуказанному принципу; этотъ путь состоитъ въ томъ, чтобы, принявъ путемъ интуиціи нѣкоторый комплексъ понятій и истинъ, выражающихъ тѣ формальныя свойства этихъ понятій, на которыя мы можемъ опираться, — свести всѣ другія понятія, обычно воспринимаемыя интуитивно, къ принятому комплексу понятій. Именно на такой путь я и становлюсь въ настоящей статьѣ. Моя цѣль — установить тотъ комплексъ понятій и истинъ, на которыя придется опираться преподавателю при изложеніи обычнаго курса геометріи для того, чтобы „освободить“ его отъ интуиціи въ вышеуказанномъ смыслѣ. При этомъ, сообразуясь съ цѣлями, которыя преслѣдуетъ преподаватель, и съ развитіемъ и уровнемъ учащихся, я счелъ необходимымъ принять слѣдующій порядокъ изложенія:

I. Сперва я излагаю тѣ теоремы, которыми я считаю необходимымъ начать курсъ геометріи; при этомъ за первыя теоремы я принимаю не тѣ, которыми начинаетъ свой курсъ геометріи г. Киселевъ, а иныя (см. ниже).

II. Затѣмъ я даю доказательства тѣхъ теоремъ, которыя необходимы для обоснованія теоремъ, изложенныхъ въ I-ой части, при чемъ я предполагаю установленной всю геометрію положенія точки на прямой и геометрію отрѣзковъ.

III. Наконецъ, я излагаю геометрію положенія точки на прямой и геометрію отрѣзковъ, строя ихъ на нѣсколькихъ интуитивно воспринимаемыхъ представленіяхъ и истинахъ.

Само собою разумѣется, что предлагаемая мною система изложенія не единственно возможная и, весьма вѣроятно, допускающая со-

крашенія и усовершенствованія. Но все-таки зто, насколько я разумѣю, система, которая даетъ возможность преподавателю „исправить“ всякое доказательство, степень строгости котораго его не удовлетворяетъ. Ниже (§ 6) даны примѣры такого рода исправленій.

Я закончу тѣмъ, чѣмъ началъ. Если интуиція при указанной системѣ изложенія и не будетъ изгнана изъ курса геометріи, то зато будетъ спасена логика: всякій силлогизмъ будетъ покоиться на двухъ посылкахъ; хотя одна или даже обѣ изъ этихъ посылокъ могутъ быть не доказаны, а только приняты, но умозаключеніе будетъ сдѣлано правильно, и преподавателю не придется „смазывать“ излагаемое мѣсто. Напротивъ того, увѣренный въ безошибочности и строгости своего доказательства, онъ съ чувствомъ полнаго удовлетворенія будетъ дѣлать свое дѣло.

Въ заключеніе я считаю своимъ долгомъ указать на то, что настоящая статья явилась результатомъ изученія сочиненія прив.-доц. В. Ф. Кагана „Основанія геометріи“. Нѣкоторыя опредѣленія и формулировки теоремъ я текстуально заимствовалъ изъ указанной книги.

I. Первыя теоремы изъ курса школьной геометріи.

§ 1. Во II-мъ томѣ „Трудовъ I-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики“ (на стр. 296) помѣщенъ докладъ И. М. Травчетова „О первой теоремѣ элементарной геометріи Евклида“. Въ этомъ докладѣ авторъ, указывая на неудобства, связанныя съ тѣмъ доказательствомъ теоремы о существованіи перпендикуляра, которое основано на вращеніи наклонной вокругъ ея основанія, предлагаетъ „строгое доказательство теоремы о перпендикулярѣ къ прямой въ данной на ней точкѣ измѣненіемъ порядка теоремъ“. Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о томъ, насколько строго предлагаемое г. Травчетовымъ доказательство и насколько вообще можетъ быть строгимъ доказательство какой бы то ни было теоремы изъ курса школьной геометріи, — я не могу не согласиться съ г. Травчетовымъ, что указанный имъ порядокъ теоремъ и идея перегибанія чертежа по нѣкоторой прямой весьма удачно избавляютъ насъ отъ необходимости принять на вѣру существованіе биссектрисы (какъ это дѣлаетъ г. Киселевъ) и, главное, „даетъ указаніе на направленіе перпендикуляра“. Но размышленіе и опытъ показали мнѣ, что теорема, поставленная г. Травчетовымъ на первомъ мѣстѣ и формулированная имъ такъ:

„изъ точки M, взятой внѣ прямой AB, можно провести такую сѣкущую MN и притомъ только одну, которая съ данной прямой AB образуетъ два равныхъ между собою смежныхъ угла“,

—страдаетъ слѣдующимъ недостаткомъ: обнаруживая равенство угловъ AOM и AON*), а также угловъ BOM и BON, эта теорема оставляетъ недоказаннымъ равенство угловъ AOM и BOM, а также угловъ AON и BON; этотъ дефектъ влечетъ за собою нѣкоторыя неудобства чисто дидактическаго характера. Въ виду этого въ настоящей статьѣ я предлагаю вниманію читателей такой порядокъ изложенія тѣхъ же теоремъ, при которомъ указанный дефектъ устраняется и который, какъ мнѣ кажется, болѣе способствуетъ выработкѣ цѣльнаго представленія о перпендикулярѣ, чѣмъ это достигается при изложеніи, избранномъ г. Травчетовымъ. При этомъ я считаю необходимымъ указать на то, что я измѣняю только порядокъ теоремъ и формулировку нѣкоторыхъ изъ нихъ; самые же способы доказательства и идею перегибанія чертежа я заимствую у г. Травчетова.

§ 2. **Опредѣленіе 1.** Фигура, образованная двумя лучами, исходящими изъ одной и той же точки, называется угломъ.

Опредѣленіе 2. Если мы наложимъ уголъ $A'O'B'$ на уголъ AOB такъ, чтобы 1) вершина O' угла $A'O'B'$ совпала съ вершиной O угла AOB, 2) чтобы сторона $O'A'$ угла $A'O'B'$ пошла по сторонѣ OA угла AOB, и 3) чтобы другая сторона $O'B'$ угла $A'O'B'$ расположилась по ту же сторону отъ совпавшихъ сторонъ, по которую лежитъ сторона OB угла AOB, то въ зависимости отъ того, пойдетъ ли сторона $O'B'$ по сторонѣ OB или же не пойдетъ, мы будемъ соотвѣтственно называть углы AOB и $A'O'B'$ равными или неравными между собою.

Въ случаѣ неравенства угловъ мы будемъ называть уголъ $A'O'B'$ меньшимъ, чѣмъ уголъ AOB, если при указанномъ наложеніи сторона $O'B'$ расположится внутри угла AOB, и большимъ, чѣмъ уголъ AOB, если сторона $O'B'$ расположится внѣ угла AOB.

Замѣтимъ, 1) что всякій разъ, какъ мы будемъ говорить ниже о наложеніи одного угла на другой, мы будемъ имѣть въ виду только такое наложеніе, о которомъ говорится въ опредѣленіи 2, и 2) что словамъ „уголъ A равенъ (больше, меньше) угла B“ мы будемъ придавать исключительно тотъ смыслъ, который установленъ опредѣленіемъ 2-мъ, не связывая съ ними никакихъ представленій о части плоскости, заключенной между сторонами угловъ.

Опредѣленіе 3. Два угла называются смежными, если одна сторона у нихъ общая, а двѣ другія стороны составляютъ продолженіе одна другой.

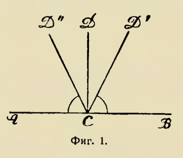
Опредѣленіе 4. Если смежные углы равны между собою, то общая сторона ихъ называется перпендикуляромъ къ прямой, на которой лежатъ другія стороны.

Теорема 1. Если изъ точки C, лежащей на данной прямой AB, возставленъ перпендикуляръ CD, то всякій другой лучъ CD', исходящій

*) O есть точка пересѣченія прямыхъ AB и MN.

изъ той же точки C и расположенный по ту же сторону отъ прямой AB, что и лучъ CD, будетъ составлять съ прямой AB неравные между собою смежные углы.

Доказательство. Такъ какъ лучъ CD' не совпадаетъ съ лучемъ CD, но расположенъ по ту же сторону отъ прямой AB, по которую лежитъ лучъ CD, то онъ проходитъ либо внутри угла BCD либо внутри угла ACD[1]). Пусть лучъ CD' (фиг. 1) проходитъ внутри угла BCD. Изъ этого слѣдуетъ, что $\angle BCD' < \angle BCD$ (опред. 2). Но $\angle BCD = \angle ACD$; слѣдовательно, $\angle BCD' < \angle ACD$. Перегнемъ теперь чертежъ по линіи CD. Тогда, въ силу равенства угловъ BCD и ACD, лучъ CB пойдетъ по лучу CA (опред. 2), а въ силу того, что $\angle BCD' < \angle ACD$, лучъ CD' пойдетъ внутри угла ACD и займетъ нѣкоторое положеніе CD''. Такъ какъ лучъ CD'' лежитъ внутри угла ACD, а уголъ ACD лежитъ внутри угла ACD'[1]), то лучъ CD'' лежитъ внутри угла ACD'[2]); слѣдовательно, $\angle ACD'' < \angle ACD'$ (опред. 2); но $\angle ACD'' = \angle BCD'$; слѣдовательно, $\angle BCD' < \angle ACD'$, что и требовалось доказать.

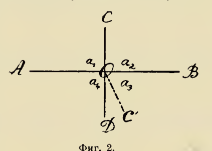


Фиг. 1.

Теорема 2. 1⁰. Если хотя бы одинъ изъ четырехъ уголовъ, образованныхъ двумя пересѣкающимися прямыми, равенъ какому-либо изъ двухъ угловъ, смежныхъ съ нимъ, то всѣ четыре угла равны между собою.

2⁰. Если же хотя бы одинъ изъ четырехъ угловъ, образованныхъ двумя пересѣкающимися прямыми, не равенъ какому-либо изъ двухъ угловъ, смежныхъ съ нимъ, то ни одинъ изъ четырехъ угловъ не равенъ ни одному изъ двухъ угловъ, смежныхъ съ нимъ.

Доказательство. 1⁰ Пусть уголъ a_1 равенъ углу a_2 (фиг. 2). Перегнемъ чертежъ по прямой CD. Тогда, въ силу равенства угловъ a_1 и a_2, лучъ OA пойдетъ по лучу OB и, слѣдовательно, уголъ $AOD = a_4$ совпадетъ съ



Фиг. 2.

[1]) Это предложеніе и всѣ слѣдующія, которыя я буду отмѣчать послѣдовательными цифрами, устанавливаются пока путемъ интуиціи; но ниже будутъ даны доказательства этихъ предложеній, свободныя отъ интуиціи См. теорему ι на стр. 110.

[2]) См. теорему ν на стр. 112.

угломъ $BOD = a_3$, изъ чего вытекаетъ, что $\angle a_3 = \angle a_4$. Перегнемъ теперь чертежъ по линіи AB. Легко видѣть, что при этомъ лучъ OC пойдетъ по лучу OD. Въ самомъ дѣлѣ, если бы лучъ OC занялъ какое-либо положеніе OC', отличное отъ OD, то углы AOC и BOC заняли бы положеніе AOC' и BOC'; но такъ какъ $\angle AOC = \angle BOC$, т. е. $\angle AOC' = \angle BOC'$, то OC' есть перпендикуляръ къ AB, возставленный въ точкѣ O; поэтому въ случаѣ несовпаденія луча OC' съ лучомъ OD вышло бы, что изъ точки O, лежащей на прямой AB, возставлены два перпендикуляра: OD (ибо $\angle AOD = \angle BOD$) и OC', что противорѣчитъ доказанному въ теоремѣ 1. Слѣдовательно, при перегибаніи чертежа по линіи AB лучъ OC совпадетъ съ лучомъ OD, вслѣдствіе чего углы a_1 и a_4, а также углы a_2 и a_3 совпадутъ; поэтому $\angle a_1 = \angle a_4$ и $\angle a_2 = \angle a_3$.

Наконецъ, изъ равенствъ $\angle a_1 = \angle a_2$ и $\angle a_1 = \angle a_4$ слѣдуетъ, что $\angle a_2 = \angle a_4$, а изъ равенствъ $\angle a_2 = \angle a_1$ и $\angle a_2 = \angle a_3$ слѣдуетъ, что $\angle a_1 = \angle a_3$.

2°. Пусть теперь уголъ a_1 не равняется углу a_2. Тогда ни одинъ изъ угловъ a_1, a_2, a_3, a_4 не будетъ равняться ни одному изъ своихъ смежныхъ угловъ, ибо, коль скоро это имѣло бы мѣсто, то, согласно прямой теоремѣ, не могло бы существовать даннаго въ условіи неравенства $\angle a_1 \neq \angle a_2$.

Замѣчаніе. Теорему 2 можно формулировать еще такъ:

Если a_1, a_2, a_3, a_4 (фиг. 2) суть четыре угла, образованные двумя пересѣкающимися прямыми, то каждое изъ равенствъ

$$a_1 = a_2, \quad a_2 = a_3, \quad a_3 = a_4, \quad a_4 = a_1$$

влечетъ за собою три остальныя, а каждое изъ неравенствъ

$$a_1 \neq a_2, \quad a_2 \neq a_3, \quad a_3 \neq a_4, \quad a_4 \neq a_1$$

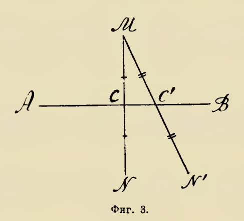
влечетъ за собою три остальныя.

Замѣтимъ, что такая формулировка охватываетъ одну прямую теорему, три теоремы, обратныя ей, теорему, противоположную прямой, и три теоремы, противоположныя обратнымъ. Поэтому теорема 2 можетъ служить матеріаломъ для поясненія учащимся связи, существующей между прямой, обратной и противоположными теоремами.

Теорема 3. Изъ всякой точки, лежащей внѣ данной прямой, можно опустить на нее перпендикуляръ и притомъ только одинъ.

Доказательство. Взявъ точку M, лежащую внѣ прямой AB, и перегнувъ чертежъ по прямой AB, отмѣтимъ ту точку плоскости, съ которой совпадаетъ точка M; пусть это будетъ точка N. Разогнувъ чертежъ, проведемъ прямую MN, опредѣляемую точками M и N. Легко видѣть, что прямая MN есть искомый перпендикуляръ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы опять перегнемъ чертежъ по линіи AB, то точка M совпадетъ съ точкой N и, слѣдовательно, лучъ CM совпадетъ съ лу-

чемъ CN (аксіома прямой); въ виду этого уголъ ACM совпадетъ съ угломъ ACN, изъ чего слѣдуетъ, что эти углы равны. Но въ такомъ случаѣ, согласно теоремѣ 2, будутъ равны между собою и углы ACM и BCM, а также углы ACN и BCN; а это обозначаетъ, что MN есть прямая, перпендикулярная къ AB, что и требовалось доказать.

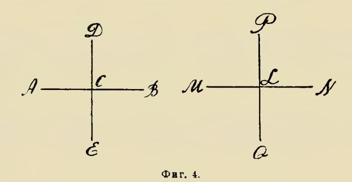


Фиг. 3.

Докажемъ теперь, что всякій другой лучъ, исходящій изъ точки M и пересѣкающій прямую AB не въ той точкѣ C, въ которой ее пересѣкаетъ лучъ MC, не будетъ перпендикуляромъ къ ней. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ лучъ MN', пересѣкающій прямую AB въ точкѣ C' (не совпадающей съ C), и отложимъ на немъ отрѣзокъ $C'N'$, равный отрѣзку MC'. Перегнемъ теперь чертежъ по линіи AB. Допустимъ, что при этомъ лучъ $C'M$ пойдетъ по лучу $C'N'$. Въ силу равенства отрѣзковъ $C'M$ и $C'N'$ изъ этого предположенія будетъ вытекать, что точка M займетъ положеніе N'. Но мы знаемъ, что при перегибаніи чертежа точка M занимаетъ положеніе N; слѣдовательно, точка N' есть не что иное, какъ точка N. Но въ такомъ случаѣ оказывается, что между точками M и N (N') проведены двѣ различныя прямыя MCN и $MC'N$, что противорѣчитъ аксіомѣ прямой. Итакъ, наше предположеніе о томъ, что при перегибаніи чертежа лучъ $C'M$ пойдетъ по лучу $C'N'$, привело насъ къ нелѣпости и потому должно быть отвергнуто. Но это обозначаетъ, что уголъ $MC'A$ неравенъ углу $N'C'A$, смежному съ нимъ (опред. 2); поэтому, согласно теоремѣ 2, 2°, уголъ $MC'A$ неравенъ также углу $MC'B$, откуда слѣдуетъ, что прямая MN' не перпендикулярна къ прямой AB.

Теорема 4. Изъ всякой точки прямой можно, по ту и другую сторону отъ этой прямой, возставить къ ней перпендикуляръ.

Доказательство. Пусть дана прямая AB и точка C на ней. Возьмемъ нѣкоторую другую прямую MN и, опустивъ на нее изъ какой-либо точки P, лежащей внѣ ея, перпендикуляръ PQ, наложимъ получившуюся фигуру на прямую AB такъ, чтобы точка L, въ кото-



Фиг. 4.

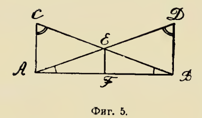
рой перпендикуляръ PQ пересѣкаетъ прямую MN, совпала съ точкой C и чтобы прямая MN пошла по прямой AB; тогда прямая PQ займетъ нѣкоторое положеніе DE; очевидно, что прямая DE и будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Замѣчаніе. Единственность перпендикуляра была уже нами установлена (теорема 1).

§ 3. Послѣ вышеприведенныхъ теоремъ можно слѣдовать тому порядку, который принятъ г. Киселевымъ въ его „Элементарной геометріи“ (изд. 22-ое, §§ 22 — 31; § 32 отвѣчаетъ нашей теоремѣ 3). Но изъ теоремъ, касающихся свойствъ равнобедреннаго треугольника (§§ 38 — 40), я предлагаю доказывать лишь теорему о равенствѣ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, пользуясь для этого переворачиваніемъ треугольника и наложеніемъ его на самого себя другою стороною. Знаніе этой теоремы даетъ возможность установить признаки равенства треугольниковъ (§§ 42 — 43), послѣ чего безъ труда доказывается теорема о тождественности высоты равнобедреннаго треугольника съ его биссектрисой и медіаной. (Замѣтимъ, что при такой формулировкѣ эта теорема можетъ быть доказана способомъ отъ противнаго и до установленія признаковъ равенства треугольниковъ).

Послѣдняя теорема позволяетъ доказать существованіе биссектрисы любого угла и середины любого отрѣзка. Въ самомъ дѣлѣ, откладывая на сторонахъ угла равные отрѣзки и соединяя концы ихъ прямою, мы получимъ равнобедренный треугольникъ, высота котораго дастъ намъ биссектрису разсматриваемаго угла.

Для построенія середины отрѣзка AB возставимъ по концамъ его два перпендикуляра въ одномъ и томъ же направленіи, отложимъ на нихъ равные отрѣзки AC и BD и соединимъ конецъ C перпендикуляра AC съ концомъ B отрѣзка AB, а конецъ D перпендикуляра BD съ концомъ A отрѣзка AB. Очевидно, что отрѣзки AD и BC пересѣкутся между собою въ нѣкоторой точкѣ E [3]). Такъ какъ прямоугольные треугольники ACB и ADB, имѣющіе общій катетъ AB и равные между собою катеты AC и BD, равны одинъ другому, то $\angle ACB = \angle ADB$ и $\angle ABC = \angle BAD$; въ силу равенства послѣдней пары угловъ равны между собою также углы CBD и CAD, соотвѣтственно дополняющіе углы ABC и BAD до прямого угла. Итакъ, треугольники AEC и BED, имѣющіе равные между собою стороны AC и BD и по парѣ соотвѣтственно равныхъ между собою угловъ, прилежащихъ къ этимъ сторонамъ, равны одинъ другому; въ силу этого стороны AE и BE треугольника AEB равны между собою. Опуская изъ вершины E равнобедреннаго треугольника AEB перпендикуляръ EF на основаніе AB, мы найдемъ середину F отрѣзка AB.



Фиг. 5.

II. Геометрія положенія точки и луча относительно прямой и геометрія угла.

§ 4. Предыдущее изложеніе предполагаетъ то развитіе учащихся, которымъ они обладаютъ въ IV-мъ классѣ мужской гимназіи и V-мъ классѣ женской гимназіи. Но ниже я предлагаю такое изложеніе нѣкоторыхъ мѣстъ изъ доказанныхъ теоремъ [они отмѣчены цифрами [1]), [2]), [3])], которое освобождаетъ ихъ отъ выводовъ, покоящихся на интуиціи. Послѣднія слова надо понимать, конечно, лишь въ томъ смыслѣ, что принявъ интуитивно нѣкоторый комплексъ геометрическихъ представленій, мы сведемъ всѣ другія интуитивныя представленія, съ которыми намъ пришлось имѣть дѣло при доказательствѣ предыдущихъ теоремъ, къ принятому комплексу представленій. Мнѣ кажется, что нижеслѣдующая теорія могла бы быть изложена въ VIII-мъ классѣ гимназіи въ цѣляхъ выясненія учащимся вопроса о роли интуиціи въ геометріи.

Опредѣленіе a. Если двѣ прямыя, или два отрѣзка, или прямая и отрѣзокъ, расположенные въ одной и той же плоскости, имѣютъ

---

[3]) См. § 5 на стр. 114.

только одну общую точку, то мы будемъ говорить, что они пересѣкаются или встрѣчаются.

Опредѣленіе β. Допустимъ, что въ одной и той же плоскости расположены прямая MN и двѣ точки A и B. Если прямая MN вовсе не встрѣчаетъ отрѣзка AB, то мы будемъ говорить, что точки A и B расположены въ этой плоскости по одну и ту же сторону отъ прямой MN; если же прямая MN встрѣчаетъ отрѣзокъ AB во внутренней его точкѣ (т. е. въ любой точкѣ, кромѣ A и B), то мы будемъ говорить, что точки A и B расположены по разныя стороны отъ прямой MN.

Опредѣленіе γ. См. опредѣленіе 1 на стр. 100.

Опредѣленіе δ. Если лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, встрѣчаетъ всякій отрѣзокъ, соединяющій какую-либо точку стороны OA съ какой-либо точкой стороны OB, въ нѣкоторой внутренней точкѣ его, то мы будемъ говорить, что лучъ OC расположенъ внутри угла AOB. Если же лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, не встрѣчаетъ ни одного отрѣзка, соединяющаго какую-либо точку стороны OA съ какой-либо точкой стороны OB, то мы будемъ говорить, что лучъ OC расположенъ внѣ угла AOB.

Постулатъ α. Прямая, пересѣкающая одну изъ трехъ сторонъ треугольника, пересѣкаетъ также какую-либо изъ двухъ остальныхъ сторонъ этого треугольника.

Эта истина, которую мы принимаемъ безъ доказательства, можетъ быть лишь пояснена тѣмъ соображеніемъ, что треугольникъ представляетъ собою замкнутый контуръ, такъ что прямая, входящая внутрь его, должна также и выйти изъ него.

Теорема α. Если точки A и C расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN и точки B и C также расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN, то и точки A и B расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN.

Доказательство. Такъ какъ прямая MN не пересѣкаетъ ни стороны AC ни стороны BC треугольника ABC, то она не пересѣкаетъ и стороны AB этого треугольника, ибо, въ противномъ случаѣ, она пересѣкала бы либо сторону AC либо сторону BC (постулатъ α).

Теорема β. Если точки A и B расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN, а точки A и C расположены по разныя стороны отъ прямой MN, то и точки B и C расположены по разныя стороны отъ прямой MN.

Доказательство. Такъ какъ прямая MN пересѣкаетъ сторону AC треугольника ABC во внутренней ея точкѣ (опред. β), но не пересѣкаетъ стороны AB этого треугольника, то она пересѣкаетъ сторону BC (постулатъ α) и притомъ во внутренней ея точкѣ, ибо прямая MN не проходитъ ни черезъ точку B (въ силу условія) ни черезъ точку C (въ силу опредѣленія β).

Теорема γ. Если лучъ OA исходитъ изъ точки O, лежащей на прямой MN, то каждыя двѣ внутреннія точки его расположены по одну и ту же сторону отъ этой прямой.

Доказательство. Если бы какой-либо отрѣзокъ $A'A''$ луча OA пересѣкался съ прямой MN, то прямыя OA и MN имѣли бы, кромѣ точки O, еще одну общую точку и потому сливались бы.

Теорема δ. Если изъ двухъ различныхъ точекъ P и Q (или изъ одной и той же точки P) прямой MN исходятъ два луча PA и QB (или PA и PB) и если какія-либо двѣ точки A и B, изъ которыхъ одна принадлежитъ лучу PA, а другая — лучу QB (или PB), расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN, — то и всякія другія двѣ точки того же рода A' и B' расположены по одну и ту же сторону отъ той же прямой.

Доказательство. Такъ какъ точки B и B' находятся по одну и ту же сторону отъ прямой MN (теорема γ) и точки A и B — также по одну и ту же сторону отъ этой прямой (по условію), то и точки A и B' расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN (теорема α). Но точки A и A' также лежатъ по одну и ту же сторону отъ прямой MN (теорема γ); слѣдовательно, точки A' и B' имѣютъ такое же расположеніе по отношенію къ этой прямой (теорема α).

Теорема ε. Если изъ двухъ различныхъ точекъ P и Q (или изъ одной и той же точки P) прямой MN исходятъ два луча PA и QB (или PA и PB) и если какія-либо двѣ точки A и B, изъ которыхъ одна принадлежитъ лучу PA, а другая — лучу QB (или PB), расположены по разныя стороны отъ прямой MN, то и всякія другія двѣ точки того же рода A' и B' расположены по разныя стороны отъ той же прямой.

Доказательство вполнѣ аналогично доказательству теоремы δ, но опирается на теорему β.

Опредѣленіе ε. Если изъ двухъ какихъ-либо точекъ P и Q*) прямой MN исходятъ два луча PA и QB и если всякія двѣ точки A и B, изъ которыхъ одна принадлежитъ лучу PA, а другая — лучу QB, расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN, то говорятъ, что лучи PA и QB расположены по одну и ту же сторону отъ той же прямой.

Замѣчаніе. Изъ теоремы δ вытекаетъ, что для того, чтобы лучи PA и QB, исходящіе изъ двухъ какихъ-либо точекъ прямой MN, были расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN, достаточно, чтобы хотя бы двѣ какія-нибудь точки A и B, принадлежащія — первая лучу PA, а вторая — лучу QB, были расположены по одну и ту же сторону отъ прямой MN.

---

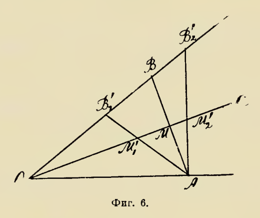
*) Точка Q можетъ совпадать съ точкой P.

Опредѣленіе ζ. Если изъ двухъ какихъ-либо точекъ P и Q*) прямой MN исходятъ два луча PA и QB и если всякія двѣ точки A и B, изъ которыхъ первая принадлежитъ лучу PA, а вторая — лучу QB, расположены по разныя стороны отъ прямой MN, то говорятъ, что лучи PA и QB расположены по разныя стороны отъ той же прямой.

Замѣчаніе. Изъ теоремы ε вытекаетъ, что для того, чтобы лучи PA и QB, исходящіе изъ двухъ какихъ-либо точекъ прямой MN, были расположены по разныя стороны отъ прямой MN, достаточно, чтобы хотя бы двѣ какія-нибудь точки A и B, принадлежащія — первая лучу PA, а вторая — лучу QB, были расположены по разныя стороны отъ прямой MN.

Опредѣленіе η. Всякій отрѣзокъ, соединяющій какую-либо точку A стороны OA угла AOB съ какой-либо точкой B стороны OB того же угла, мы будемъ называть отрѣзкомъ AB, опирающимся на стороны угла AOB.

Теорема ζ. Если лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, пересѣкаетъ хотя бы одинъ отрѣзокъ AB, опирающійся на стороны этого угла, то онъ пересѣкаетъ также и всякій другой отрѣзокъ $A'B'$, опирающійся на стороны того же угла.



Фиг. 6.

Доказательство. Такъ какъ точки A и B, служащія концами отрѣзка AB и принадлежащія — первая лучу OA, а вторая — лучу OB, расположены по разныя стороны отъ прямой OC, то, согласно теоремѣ ε, каждыя двѣ точки A' и B', принадлежащія — первая лучу OA,

*) Точка Q можетъ совпадать съ точкой P.

а вторая — лучу OB, также расположены по разныя стороны отъ прямой OC; иначе говоря, прямая OC пересѣкаетъ всякій отрѣзокъ $A'B'$, опирающійся на стороны угла AOB.

Остается доказать, что точка пересѣченія прямой OC съ отрѣзкомъ $A'B'$ принадлежитъ лучу OC прямой OC, а не лучу OC' той же прямой, составляющему продолженіе перваго. Для этого разсмотримъ отдѣльно два положенія точки B' на лучѣ OB: B_1' — на отрѣзкѣ OB и B_2' — внѣ этого отрѣзка.

Такъ какъ точки O и B (фиг. 6) находятся по разныя стороны отъ прямой AB_1', а точки B и M — по одну и ту же сторону отъ этой прямой (теорема γ), то точки O и M расположены по разныя стороны отъ прямой AB_1'; слѣдовательно, точка пересѣченія M_1' прямыхъ OC и AB_1', которая, какъ было доказано выше, принадлежитъ отрѣзку AB_1', принадлежитъ также отрѣзку OM, т. е. лежитъ на лучѣ OC.

Далѣе, такъ какъ точки O и B_2' расположены, согласно условію, по разныя стороны отъ прямой AB, а точки M_2' и B_2' — по одну и ту же сторону отъ этой прямой (теорема γ), то точки O и M_2' лежатъ по разныя стороны отъ той же прямой (теорема β); но это значитъ, что точка M есть внутренняя точка отрѣзка OM_2' (опредѣленіе β); въ виду этого точка M принадлежитъ лучу OM_2' и, значитъ, точка M_2' принадлежитъ лучу OM, т. е. лучу OC*). Точно такимъ же образомъ мы докажемъ, что точка, въ которой прямая OC встрѣчаетъ отрѣзокъ $A'B'$ (при любомъ положеніи точки A' относительно точки A), принадлежитъ лучу OC.

Теорема η. Если лучъ OC, исходящій изъ вершины угла AOB, не пересѣкаетъ хотя бы одного отрѣзка, опирающагося на стороны угла AOB, то этотъ лучъ не пересѣкаетъ ни одного отрѣзка, опирающагося на стороны того же угла.

Доказательство. Если бы лучъ OC пересѣкалъ хотя бы одинъ отрѣзокъ, опирающійся на стороны угла AOB, то онъ пересѣкалъ бы всякій отрѣзокъ, опирающійся на стороны того же угла (теорема ζ), что противно условію.

Замѣчаніе. Теоремы ζ и η позволяютъ установить, что всякій лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, можетъ занимать по отношенію къ этому углу одно и только одно изъ двухъ слѣдующихъ положеній: либо лучъ OC лежитъ внутри угла AOB, либо онъ лежитъ внѣ этого угла. Въ самомъ дѣлѣ, если лучъ OC встрѣчаетъ какой-либо отрѣзокъ AB, опирающійся на стороны угла AOB, то онъ встрѣчаетъ всякій отрѣзокъ $A'B'$ того же рода и, слѣдовательно, лежитъ внутри угла AOB (опредѣленіе δ); если же

*) Ч. III, слѣдствіе 1.

лучъ OC не встрѣчаетъ отрѣзка AB, то онъ не встрѣчаетъ ни одного отрѣзка того же рода и, слѣдовательно, лежитъ внѣ угла AOB (опредѣленіе δ).

Опредѣленіе ϑ. См. опредѣленіе 2 на стр. 100.

Замѣчаніе. Замѣтимъ, что для того, чтобы при наложеніи угла $A'O'B'$ на уголъ AOB, указанномъ въ опредѣленіи ϑ, расположить сторону $O'B'$ угла $A'O'B'$ по ту же сторону отъ совпавшихъ сторонъ, по которую лежитъ сторона OB угла AOB, достаточно, чтобы хотя бы одна точка луча $O'B'$ расположилась по ту же сторону отъ совпавшихъ сторонъ, по которую лежитъ какая-либо точка стороны OB (опредѣленіе ε и замѣчаніе).

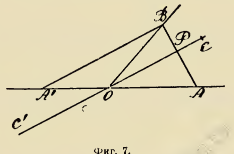
Опредѣленіе ι. См. опредѣленіе 3 на стр. 100.

Опредѣленіе $\varkappa$. См. опредѣленіе 4 на стр. 100.

Теорема ϑ. Если лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, лежитъ внутри этого угла, то лучъ OB лежитъ внѣ угла AOC, а лучъ OA — внѣ угла BOC.

Доказательство. Такъ какъ лучъ OC пересѣкаетъ всякій отрѣзокъ AB, опирающійся на стороны угла AOB, въ нѣкоторой внутренней точкѣ C этого отрѣзка, то точка B не принадлежитъ отрѣзку AC*); слѣдовательно, лучъ OB не пересѣкаетъ отрѣзка AC, опирающагося на стороны угла AOC, и поэтому (теорема η и опредѣленіе δ) лежитъ внѣ угла AOC. Точно такъ же доказывается, что лучъ OA лежитъ внѣ угла BOC.

Теорема ι. Если лучъ OC, исходящій изъ общей вершины O двухъ смежныхъ угловъ AOB и $A'OB$, расположенъ по ту же сторону отъ прямой $A'A$, по которую лежитъ общая сторона OB смежныхъ угловъ, — то этотъ лучъ OC расположенъ либо внутри угла AOB либо внутри угла $A'OB$, смежнаго съ первымъ, при чемъ одно изъ этихъ положеній исключаетъ другое.



Фиг. 7.

Доказательство. Взявъ на лучахъ OA, OB и OA' (фиг. 7) соотвѣтственно точки A, B и A', проведемъ отрѣзки AB и $A'B$ и разсмотримъ треугольникъ ABA'. Такъ какъ прямая CC', проходящая черезъ точку O стороны $A'A$, пересѣкаетъ эту сторону, то она

*) Ч. III, слѣдствіе III.

должна пересѣчь также одну изъ остальныхъ сторонъ треугольника ABA' (постулатъ α). Допустимъ, что прямая CC' пересѣкаетъ отрѣзокъ AB, опирающійся на стороны угла AOB, и именно въ нѣкоторой точкѣ P*). Остается доказать, что точка P лежитъ на лучѣ OC прямой CC'. Для этого разсмотримъ нѣкоторую точку C луча OC. Такъ какъ лучи OB и OC, согласно условію, расположены по одну и ту же сторону отъ прямой AA', то точки B и C расположены по одну и ту же сторону отъ той же прямой (опредѣленіе ε): но точки B и P имѣютъ то же расположеніе по отношенію къ прямой AA' (теорема γ); слѣдовательно, точки P и C также расположены по одну и ту же сторону отъ прямой AA' (теорема α). Но точка C, согласно условію, принадлежитъ лучу OC; поэтому и точка P, расположенная на прямой CC' по ту же сторону отъ точки O, по которую лежитъ точка C, также лежитъ на лучѣ OC**).

Если бы мы допустили, что прямая CC' пересѣкаетъ не сторону AB, а сторону $A'B$ треугольника ABA', то путемъ аналогичныхъ разсужденій доказали бы, что лучъ OC расположенъ внутри угла $A'OB$, смежнаго съ угломъ AOB.

Но каждое изъ двухъ положеній, которыя можетъ занимать лучъ OC при указанныхъ въ текстѣ теоремы условіяхъ, исключаетъ другое. Въ самомъ дѣлѣ, если лучъ OC лежитъ внутри угла AOB, то лучъ OB лежитъ внѣ угла AOC (теорема ϑ); но такъ какъ AOC и $A'OC$ суть углы смежные, то, согласно только-что доказанной части теоремы ι, лучъ OB лежитъ внутри угла $A'OC$, смежнаго съ угломъ AOC, и, слѣдовательно, лучъ OC лежитъ внѣ угла $A'OB$ (теорема ϑ).

Теорема $\varkappa$. Если лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, лежитъ внѣ этого угла, но по ту же сторону отъ прямой OA, по которую лежитъ лучъ OB, то лучъ OB лежитъ внутри угла AOC.

Доказательство. Если бы лучъ OB не лежалъ внутри угла AOC, то, будучи расположенъ по ту же сторону отъ прямой OA, по которую лежитъ лучъ OC, онъ проходилъ бы внутри угла $A'OC$, смежнаго съ угломъ AOC (теорема ι); но въ такомъ случаѣ лучъ OC, согласно теоремѣ ϑ, лежалъ бы внѣ угла $A'OB$ и, слѣдовательно, внутри угла AOB, смежнаго съ первымъ (теорема ι), что противорѣчитъ условію.

Теорема λ. Если уголъ AOB меньше угла $A'O'B'$, то уголъ $A'O'B'$ больше угла AOB.

Доказательство. Такъ какъ при надлежащемъ наложеніи угла AOB на уголъ $A'O'B'$ (опредѣленіе ϑ) лучъ OB пойдетъ внутри угла $A'O'B'$, то лучъ $O'B'$ окажется лежащимъ внѣ угла AOB (теорема ϑ); слѣдовательно, уголъ $A'O'B'$ больше угла AOB.

Теорема μ. Если уголъ $A'O'B'$ больше угла AOB, то уголъ AOB меньше угла $A'O'B'$.

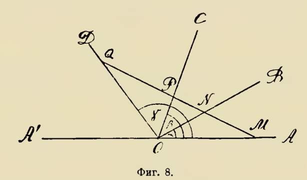
*) Точка P отлична отъ точекъ A и B, ибо въ противномъ случаѣ лучъ OC сливался бы соотвѣтственно съ лучами OA или OB.

**) Ч. III, теорема II.

Доказательство. Такъ какъ при надлежащемъ наложенiи угла $A'O'B'$ на уголъ AOB, лучъ $O\,B'$ расположится внѣ угла AOB, но по ту же сторону отъ прямой OA, по которую лежитъ лучъ OB, то лучъ OB окажется лежащимъ внутри угла $A'O'B'$ (теорема $\varkappa$); слѣдовательно, уголъ AOB меньше угла $A'O'B'$.

Теорема ν. Если уголъ α меньше угла β, а уголъ β меньше угла γ, то уголъ α меньше угла γ.

Доказательство. Допустимъ, что мы надлежащимъ образомъ наложили уголъ α на уголъ β, а уголъ β на уголъ γ. Очевидно, что при этомъ одна изъ сторонъ угла γ совпадетъ съ той стороной угла β, которая совпала съ одной изъ сторонъ угла α; обозначимъ эти три совпавшiя между собою луча черезъ OA (фиг. 8), а три остальныя



Фиг. 8.

стороны угловъ α, β, γ — соотвѣтственно черезъ OB, OC и OD; при этомъ замѣтимъ, что, въ силу условiй наложенiя, лучи OB и OC, а также лучи OC и OD расположены по одну и ту же сторону отъ прямой OA. Возьмемъ теперь на лучахъ OA и OD произвольныя точки M и Q и соединимъ ихъ отрѣзкомъ MQ. Такъ какъ лучъ OC лежитъ внутри угла AOD $(\beta < \gamma)$, то онъ пересѣкаетъ отрѣзокъ MQ въ нѣкоторой внутренней точкѣ P, такъ что отрѣзокъ PM составляетъ часть отрѣзка QM. Далѣе, такъ какъ лучъ OB лежитъ внутри угла AOC $(\alpha < \beta)$, то лучъ OB встрѣчаетъ отрѣзокъ PM и притомъ въ нѣкоторой внутренней точкѣ N этого послѣдняго отрѣзка; но точка N служитъ въ то же время внутренней точкой отрѣзка MQ *); слѣдовательно, лучъ OB встрѣчаетъ отрѣзокъ MQ, опирающiйся на стороны угла AOD, и потому лежитъ внутри этого угла (теорема ζ). Такъ какъ точки N и Q расположены по одну и ту же сторону отъ прямой AA' (теорема γ), то лучи OB и OD расположены по одну и ту

*) Ч. III, теорема XIV.

же сторону отъ прямой AA' (опредѣленіе ε и замѣчаніе). Итакъ, оказывается, что уголъ AOB надлежащимъ образомъ наложенъ на уголъ AOD (лучи OB и OD, какъ доказано, лежатъ по одну и ту же сторону отъ прямой OA), при чемъ сторона OB перваго изъ этихъ угловъ идетъ внутри второго; а это обозначаетъ, что уголъ AOB меньше угла AOD.

Теорема ξ. Если точки A и C, а также точки B и C лежатъ по разныя стороны отъ прямой MN, то точки A и B лежатъ по одну и ту же сторону отъ той же прямой.

Доказательство. Допустимъ, что прямая MN, пересѣкающая, согласно условію, отрѣзки AC и BC соотвѣтственно во внутреннихъ точкахъ ихъ M и N, пересѣкаетъ отрѣзокъ AB въ нѣкоторой внутренней точкѣ его P. Такъ какъ лучъ AN пересѣкаетъ отрѣзокъ BC, опирающійся на стороны угла BAC, во внутренней точкѣ его N, то онъ пересѣкаетъ и отрѣзокъ MP, опирающійся на стороны того же угла, въ нѣкоторой внутренней точкѣ его Q (теорема ζ); при этомъ, такъ какъ точки A и M, а также точки A и P расположены по одну и ту же сторону отъ прямой BC, то и точки M и P расположены по одну и ту же сторону отъ той же прямой (теорема α); слѣдовательно, отрѣзокъ MP не имѣетъ общихъ точекъ съ прямой BC; поэтому точка Q отлична отъ точки N. Итакъ, лучъ AN имѣетъ съ прямой MP общую точку Q, а съ прямой MN — общую точку N; но мы допустили, что точка P лежитъ на прямой MN; слѣдовательно, прямыя MP и MN сливаются; поэтому лучъ AN, имѣя съ прямой MN двѣ общія точки Q и N, также сливается съ ней, въ виду чего точка A этого луча лежитъ на прямой MN, что противорѣчитъ условію. Такимъ образомъ, прямая MN не пересѣкаетъ отрѣзка AB въ его внутренней точкѣ.

Но прямая MN не пересѣкаетъ также отрѣзка AB ни въ точкѣ A ни въ точкѣ B, ибо въ первомъ случаѣ прямая MN сливалась бы съ прямой MA и точка A лежала бы на прямой MN, а во второмъ случаѣ мы пришли бы къ тому же выводу относительно точки B.

Теорема π. Если лучъ OC, исходящій изъ вершины O угла AOB, лежитъ внутри угла AOB, то каждый изъ двухъ угловъ, образованныхъ лучемъ OC съ лучами OA и OB, меньше угла AOB.

Доказательство. Лучъ OC пересѣкаетъ всякій отрѣзокъ AB, опирающійся на стороны угла AOB, въ нѣкоторой внутренней точкѣ его C. Такъ какъ точки C и B расположены по одну и ту же сторону отъ прямой OA (теорема γ), то и лучи OC и OB расположены по одну и ту же сторону отъ этой прямой (замѣчаніе къ опредѣленію ε). Слѣдовательно, оказывается, что при надлежащемъ наложеніи угла AOC на уголъ AOB лучъ OC располагается внутри угла AOB; поэтому уголъ AOC меньше угла AOB.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

§ 5. Для построенія середины отрѣзка AB служитъ способъ, указанный въ § 3 (стр. 105, фиг. 5). Но доказательство не будетъ строгимъ, если мы не установимъ, что отрѣзки AD и BC пересѣкаются. Это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ.

Замѣтимъ прежде всего, что, такъ какъ перпендикуляры AC и BD, согласно условію, расположены по одну и ту же сторону отъ прямой AB, то точки C и D лежатъ по одну и ту же сторону отъ этой прямой (опредѣленіе ε); но въ такомъ случаѣ и лучи AC и AD расположены по одну и ту же сторону отъ прямой AB (замѣчаніе къ опредѣленію ε).

Докажемъ теперь, что уголъ BAD меньше угла BAC. Уголъ BAD не можетъ равняться углу BAC, ибо, если бы это было такъ, то, въ силу того, что уголъ BAD наложенъ на уголъ BAC, сторона AD пошла бы по сторонѣ AC, и точка D лежала бы на прямой AC, такъ что вышло бы, что изъ точки D опущены на прямую AB два перпендикуляра: DA и DB. Но уголъ BAD не можетъ быть также больше угла BAC, ибо, если бы это было такъ, то уголъ BAC былъ бы меньше угла BAD (теорема μ) и, слѣдовательно, лучъ AC проходилъ бы внутри угла BAD и пересѣкалъ бы отрѣзокъ BD, опирающійся на стороны угла BAD, въ нѣкоторой точкѣ M; но тогда вышло бы, что изъ точки M опущены на прямую AB два перпендикуляра: MA и MB. Итакъ, уголъ BAD меньше угла BAC; въ виду этого лучъ AD лежитъ внутри угла BAC и, слѣдовательно, пересѣкаетъ отрѣзокъ BC, опирающійся на стороны угла BAC, въ нѣкоторой точкѣ E.

§ 6. Предыдущій матеріалъ вполнѣ достаточенъ для обоснованія тѣхъ теоремъ, которыя входятъ въ составъ геометріи положенія. Я позволю себѣ только привести дополненія къ тремъ теоремамъ, доказываемымъ обычно въ курсѣ геометріи недостаточно строго.

1) Въ теоремѣ о внѣшнемъ углѣ треугольника (Киселевъ, § 45, черт. 43) необходимо доказать, что лучъ CF лежитъ внутри угла BCD. Это вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Лучъ AD не пересѣкаетъ отрѣзка EF, принадлежащаго лучу AF (теорема γ); слѣдовательно, лучъ CD также не пересѣкаетъ отрѣзка EF; но отрѣзокъ EF опирается на стороны угла BCF; поэтому лучъ CD лежитъ внѣ угла BCF (теорема η и опредѣленіе δ). Далѣе, такъ какъ точки A и F, а также точки A и D (D есть любая внутренняя точка луча CD) расположены по разныя стороны отъ прямой BC, то точки F и D расположены по одну и ту же сторону отъ этой прямой (теорема ξ); но въ такомъ случаѣ лучи CF и CD расположены по одну и ту же сторону отъ прямой BC (опредѣленіе ε, замѣчаніе). Итакъ, лучъ CD лежитъ внѣ угла BCF, но по ту же сторону отъ прямой BC, по которую лежитъ лучъ CF; слѣдовательно, лучъ CF лежитъ внутри угла BCD (теорема $\varkappa$).

2) Въ теоремѣ „во всякомъ треугольникѣ противъ большей стороны лежитъ и бо́льшій уголъ" (Киселевъ, § 47, черт. 45) надо доказать, что уголъ DCB меньше угла ACB. Это непосредственно вытекаетъ изъ теоремы π, такъ какъ, согласно построенію, точка D лежитъ на отрѣзкѣ AB, опирающемся на стороны угла ACB, и, слѣдовательно, лучъ CD проходитъ внутри угла ACB.

3) Въ теоремѣ „въ треугольникѣ каждая сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ" (Киселевъ, § 52, черт. 48) надо доказать, что уголъ BCD меньше угла ACD. Это слѣдуетъ изъ теоремы π, такъ какъ точка B лежитъ на отрѣзкѣ AD, опирающемся на стороны угла ACD, и, слѣдовательно, лучъ CB проходитъ внутри угла ACD.

III. Геометрія положенія точки на прямой и геометрія отрѣзка.

§ 7. Аксіома прямой. Каждыя двѣ точки опредѣляютъ одну и только одну прямую.

Эта аксіома замѣняетъ собою опредѣленіе прямой, указывая на главное и самое существенное свойство ея: черезъ двѣ точки не можетъ проходить больше одной прямой.

Примемъ безъ опредѣленія, что:

1°. На прямой лежитъ, или прямой принадлежитъ, безчисленное множество точекъ.

2°. Каждая точка A, лежащая на прямой MN, дѣлитъ послѣднюю на два луча, исходящихъ изъ точки A.

3°. Каждая точка P прямой MN, отличная отъ точки A этой прямой, принадлежитъ одному и только одному изъ двухъ лучей, на которые дѣлитъ прямую MN точка A.

4°. Точка A принадлежитъ каждому изъ двухъ лучей, на которые она дѣлитъ прямую MN.

Условіе I. Условимся обозначать лучъ, исходящій изъ точки A и проходящій черезъ точку B, черезъ AB.

Опредѣленіе I. Если точки A и B лежатъ на прямой MN, то лучъ, исходящій изъ точки A и не проходящій черезъ точку B (существованіе такого луча вытекаетъ изъ 3°), мы будемъ называть лучемъ, противоположнымъ лучу AB.

Условіе II. Условимся обозначать лучъ, противоположный лучу AB, черезъ AB'. (Такимъ образомъ, знакъ $'$, стоящій вверху второй изъ буквъ, входящихъ въ обозначеніе луча, будетъ обозначать, что лучъ не проходитъ черезъ точку, обозначаемую самой буквой).

Опредѣленіе II. Если точки A и B принадлежатъ прямой MN, то совокупность всѣхъ тѣхъ точекъ этой прямой, которыя принадлежатъ одновременно какъ лучу AB, такъ и лучу BA, мы будемъ называть отрѣзкомъ AB.

Опредѣленіе III. Всякую точку P отрѣзка AB, отличную отъ точекъ A и B, мы будемъ называть **внутренней** точкой этого отрѣзка.

Теорема I. Если точка C лежитъ на лучѣ AB, то лучъ AC совпадаетъ съ лучемъ AB.

Доказательство. Прямая AC имѣетъ съ прямой AB двѣ общія точки (A и C) и поэтому совпадаетъ съ ней. Такъ какъ лучъ AC исходитъ изъ той же точки A, изъ которой исходитъ лучъ AB, то лучъ AC совпадаетъ либо съ лучемъ AB либо съ лучемъ AB'. Но если бы лучъ AC совпадалъ съ лучемъ AB', то лучъ AB' содержалъ бы точку C, чего быть не можетъ въ силу того, что эту точку содержитъ, согласно условію, лучъ AB, противоположный лучу AB' (3°). Итакъ, лучъ AC совпадаетъ съ лучемъ AB.

Слѣдствіе I. Если точка C принадлежитъ лучу AB, то точка B принадлежитъ лучу AC.

Опредѣленіе IV. Если точка B лежитъ на лучѣ OA и, слѣдовательно, точка A лежитъ на лучѣ OB (слѣдствіе I), то мы будемъ говорить, что **точки A и B находятся на одномъ и томъ же лучѣ по отношенію къ точкѣ O** (теорема I).

Опредѣленіе V. Если точка B находится не на лучѣ OA, а на лучѣ OA', противоположномъ лучу OA, то мы будемъ говорить, что **точки A и B лежатъ на разныхъ лучахъ по отношенію къ точкѣ O** (теорема I*).

Опредѣленіе VI. Если точка O прямой AB не принадлежитъ отрѣзку AB, то мы будемъ говорить, что **точки A и B лежатъ по одну и ту же сторону отъ точки O этой прямой.**

Опредѣленіе VII. Если точка O прямой AB есть **внутренняя** точка отрѣзка AB, то мы будемъ говорить, что **точки A и B лежатъ по разныя стороны отъ точки O этой прямой.**

Постулатъ I. Если точки A и B прямой AB лежатъ на одномъ и томъ же лучѣ относительно точки O, то эти точки расположены по одну и ту же сторону отъ точки O.

Постулатъ II. Если точки A и B прямой AB лежатъ на разныхъ лучахъ относительно точки O, то эти точки расположены по разныя стороны отъ точки O.

Теорема II. Если точки A и B прямой AB расположены по одну и ту же сторону отъ точки O той же прямой, то эти точки лежатъ на одномъ и томъ же лучѣ по отношенію къ точкѣ O.

Теорема III. Если точки A и B прямой AB расположены по

*) Замѣтимъ, что, если точка B находится на лучѣ OA', то точка A находится на лучѣ OB', ибо, если бы точка A находилась на лучѣ OB, то точка B находилась бы на лучѣ OA (слѣдствіе I), что противно условію.

разныя стороны отъ точки O той же прямой, то эти точки лежатъ на разныхъ лучахъ по отношенію къ точкѣ O.

Доказательство теоремъ II и III вытекаетъ непосредственно изъ постулатовъ I и II, если примѣнить способъ отъ противнаго и принять во вниманіе, что каждыя двѣ точки прямой AB могутъ лежать либо на одномъ и томъ же лучѣ по отношенію къ точкѣ O либо на разныхъ лучахъ, при чемъ одно положеніе исключаетъ другое (3⁰).

Теорема IV. Если точки A и B лежатъ на прямой MN, то лучъ AB' и лучъ BA' не имѣютъ ни одной общей точки.

Доказательство. Если мы допустимъ, что точка P прямой MN принадлежитъ одновременно лучу AB' и лучу BA', то, съ одной стороны, окажется, что лучъ AP содержитъ точку B, ибо точки A и P, расположенныя на разныхъ лучахъ по отношенію къ точкѣ B (точка A лежитъ на лучѣ BA, а точка P, согласно допущенію, — на лучѣ BA'), лежатъ по разныя стороны отъ точки B (постулатъ II), и, слѣдовательно, точка B принадлежитъ лучу AP (опр-нія VII, III и II); но, съ другой стороны, при сдѣланномъ допущеніи окажется, что лучъ AP не содержитъ точки B, ибо точка P, согласно допущенію, находится на лучѣ AB' и, слѣдовательно, лучи AP и AB' совпадаютъ (теорема I), но лучъ AB' не содержитъ точки B, а потому ея не содержитъ и лучъ AP. Итакъ, допуская, что лучи AB' и BA' имѣютъ общую точку P, мы впадаемъ въ противорѣчіе.

Теорема V. Если точки A и B лежатъ на прямой MN, то всѣ точки луча BA' принадлежатъ лучу AB, а всѣ точки луча AB' принадлежатъ лучу BA.

Доказательство. Если точка P принадлежитъ лучу BA', то она въ то же время принадлежитъ либо лучу AB, либо лучу AB'. Но одновременно принадлежать лучамъ BA' и AB' точка P не можетъ. Поэтому она необходимо должна принадлежать лучу AB. Точно такъ же доказывается и вторая половина теоремы.

Теорема VI. Если A и B суть двѣ различныя точки прямой MN, то всякая точка P той же прямой, отличная отъ точекъ A и B, можетъ лежать либо на лучѣ AB', либо на отрѣзкѣ AB, либо на лучѣ BA', при чемъ каждое изъ этихъ положеній исключаетъ остальныя.

Доказательство. Каждая точка P прямой MN можетъ занимать одно и только одно изъ слѣдующихъ положеній: 1) либо на лучѣ AB' и въ то же время на лучѣ BA, 2) либо на лучѣ AB' и въ то же время на лучѣ BA', 3) либо на лучѣ AB и въ то же время на лучѣ BA, 4) либо на лучѣ AB и въ то же время на лучѣ BA', что можно представить схематически такъ:

$$\frac{AB'}{|BA,\ \ BA'|},\qquad \frac{AB}{|BA,\ \ BA'|},$$

или еще такъ: (AB', BA), (AB', BA'), (AB, BA), (AB, BA'). Такъ

какъ положеніе (AB', BA'), согласно теоремѣ IV, невозможно, то остаются три положенія: (AB', BA), (AB, BA') и (AB, BA). Но такъ какъ, въ силу теоремы V, всѣ точки луча AB' принадлежатъ лучу BA, а всѣ точки луча BA' принадлежатъ лучу AB, то положеніе (AB', BA) тождественно съ положеніемъ (AB'), а положеніе (AB, BA') тождественно съ положеніемъ (BA'); положеніе же (AB, BA) обозначаетъ положеніе на отрѣзкѣ AB (опредѣленіе II). Итакъ, точка P можетъ занимать одно и только одно изъ трехъ положеній:

$$(AB'), \quad (BA'), \quad (AB,\ BA).$$

Слѣдствіе II. Если A и B суть двѣ точки прямой MN, то всякая точка P этой прямой, отличная отъ точекъ A и B и принадлежащая лучу AB, лежитъ либо на отрѣзкѣ AB либо на лучѣ BA', при чемъ одно положеніе исключаетъ другое.

Доказательство. Точка P, принадлежа лучу AB, не принадлежитъ лучу AB' (3°) и, слѣдовательно, занимаетъ одно и только одно изъ двухъ положеній: либо (AB, BA) либо (BA').

Теорема VII. Если C есть внутренняя точка отрѣзка AB, то лучъ CA' есть не что иное, какъ лучъ CB, а лучъ CB' есть не что иное, какъ лучъ CA.

Доказательство. Если бы лучъ CB совпадалъ не съ лучемъ CA', а съ лучемъ CA, то точки A и B лежали бы на одномъ и томъ же лучѣ по отношенію къ точкѣ C (опредѣленіе IV); но въ такомъ случаѣ эти точки были бы расположены по одну и ту же сторону отъ точки C (постулатъ I), т. е. точка C не принадлежала бы отрѣзку AB (опредѣленіе VI), что противорѣчитъ условію.

Слѣдствіе III. Если C есть внутренняя точка отрѣзка AB, то точка A не принадлежитъ отрѣзку CB, а точка B не принадлежитъ отрѣзку AC.

Доказательство. Такъ какъ лучъ CB' совпадаетъ съ лучемъ CA, то лучъ CA не содержитъ точки B; но въ такомъ случаѣ точка B не принадлежитъ отрѣзку CA. Точно такъ же лучъ CA' совпадаетъ съ лучемъ CB, въ силу чего лучъ CB не содержитъ точки A и, слѣдовательно, точка A не принадлежитъ отрѣзку CB.

Теорема VIII. Если точка C есть внутренняя точка отрѣзка AB, то

1° каждая точка P отрѣзка AB, отличная отъ точки C, принадлежитъ либо отрѣзку AC либо отрѣзку CB, при чемъ одно положеніе исключаетъ другое;

2° каждая точка Q отрѣзка AC, а также каждая точка R отрѣзка CB принадлежитъ отрѣзку AB.

Доказательство. 1°. Такъ какъ точка P принадлежитъ отрѣзку AB, то она лежитъ на лучѣ AB и, слѣдовательно, на лучѣ AC (теорема I). Но, принадлежа лучу AC, точка можетъ находиться либо на отрѣзкѣ AC

либо на лучѣ CA', при чемъ одно положеніе исключаетъ другое (слѣдствіе II). Поэтому, если точка P находится на отрѣзкѣ AC, то она не принадлежитъ уже лучу CA', т. е. лучу CB (теорема VII), а потому она не принадлежитъ уже и отрѣзку CB (опредѣленіе II). Если же точка P не принадлежитъ отрѣзку AC, то, какъ сказано было выше, она принадлежитъ лучу CA', т. е. лучу CB (теорема VII); но, съ другой стороны, принадлежа отрѣзку AB, она принадлежитъ лучу BA и, слѣдовательно, лучу BC (теорема I); поэтому точка P принадлежитъ отрѣзку CB (опредѣленіе II).

2°. Такъ какъ точка Q принадлежитъ отрѣзку AC, то она принадлежитъ лучу AC и, значитъ, лучу AB (теорема I); съ другой стороны, точка Q принадлежитъ лучу CA, т. е. лучу CB' (теорема VII); но въ такомъ случаѣ она не принадлежитъ лучу CB и, слѣдовательно, не принадлежитъ ни отрѣзку CB ни лучу BC' (теорема V); но лучъ BC совпадаетъ съ лучемъ BA, а потому лучъ BC' совпадаетъ съ лучемъ BA'; значитъ, точка Q не принадлежитъ лучу BA' и, слѣдовательно, принадлежитъ лучу BA; но, принадлежа лучамъ AB и BA, точка Q принадлежитъ отрѣзку AB.

Аналогично докажемъ, что точка R принадлежитъ отрѣзку AB.

Теорема IX. Если точки A и C находятся по одну и ту же сторону отъ точки O и точки B и C также находятся по одну и ту же сторону отъ точки O, то и точки A и B расположены по одну и ту же сторону отъ точки O.

Доказательство. Такъ какъ лучъ OA совпадаетъ съ лучемъ OC и лучъ OB также совпадаетъ съ лучемъ OC (теорема II, опредѣленіе IV и теорема I), то лучъ OA совпадаетъ съ лучемъ OB; но въ такомъ случаѣ точки A и B расположены по одну и ту же сторону отъ точки O (опредѣленіе IV и постулатъ I).

Теорема X. Если точки A и B расположены по одну и ту же сторону отъ точки O, а точки A и C расположены по разныя стороны отъ точки O, то и точки B и C расположены по разныя стороны отъ точки O.

Доказательство. Такъ какъ лучъ OB совпадаетъ съ лучемъ OA (теорема II, опредѣленіе IV и теорема I), а лучъ OC совпадаетъ съ лучемъ OA' (теорема III, опредѣленіе V и теорема I) и, слѣдовательно, лучъ OC' совпадаетъ съ лучемъ OA, то лучъ OB совпадаетъ съ лучемъ OC'; но это значитъ, что точка B принадлежитъ лучу OC', а не лучу OC, т. е. что точки B и C лежатъ на разныхъ лучахъ по отношенію къ точкѣ O (опредѣленіе V); но въ такомъ случаѣ точки B и C расположены по разныя стороны отъ точки O (постулатъ II *).

Теорема XI. Если точки A и C, а также точки B и C лежатъ по разныя стороны отъ точки O, то точки A и B лежатъ по одну и ту же сторону отъ точки O.

---

*) Эту теорему можно также доказать способомъ отъ противнаго, опираясь на теорему IX.

Доказательство. Такъ какъ точки A и B лежатъ на одномъ и томъ же лучѣ OC' (теорема III, опредѣленіе V), то эти точки расположены по одну и ту же сторону отъ точки O (постулатъ I).

§ 8. Опредѣленіе VIII. Если мы наложимъ прямую MN на прямую PQ такъ, чтобы 1) точка M прямой MN совпала съ точкой P прямой PQ и 2) чтобы лучъ MN прямой MN совпалъ съ лучемъ PQ прямой PQ, то въ зависимости отъ того, совпадетъ ли при этомъ точка N съ точкой Q или не совпадетъ, мы будемъ соотвѣтственно называть отрѣзки MN и PQ равными или неравными между собою.

Въ случаѣ неравенства отрѣзковъ мы будемъ называть отрѣзокъ MN меньшимъ, чѣмъ отрѣзокъ PQ, если при указанномъ наложеніи точка N совпадетъ съ какой-либо изъ внутреннихъ точекъ отрѣзка PQ, и большимъ, чѣмъ отрѣзокъ PQ, если точка N совпадетъ съ какой-либо изъ точекъ луча QP'.

Замѣчаніе. Изъ слѣдствія II вытекаетъ, что, если точка N не совпадаетъ при наложеніи съ точкой Q, то она лежитъ либо на отрѣзкѣ PQ либо на лучѣ QP', при чемъ одно положеніе исключаетъ другое. Въ виду этого два отрѣзка могутъ быть либо равны между собою либо неравны; въ послѣднемъ случаѣ первый отрѣзокъ можетъ быть либо меньше второго либо больше его, при чемъ одно соотношеніе исключаетъ другое.

Теорема XII. Если отрѣзокъ MN меньше отрѣзка PQ, то отрѣзокъ PQ больше отрѣзка MN.

Доказательство. Такъ какъ точка N есть внутренняя точка отрѣзка PQ, то точка Q не принадлежитъ отрѣзку PN, т. е. отрѣзку MN (слѣдствіе III); но точка Q принадлежитъ лучу MN, ибо лучъ MN совпадаетъ съ лучемъ PQ (опредѣленіе VIII); слѣдовательно, точка Q принадлежитъ лучу NM' (слѣдствіе II); но это значитъ, что отрѣзокъ PQ больше отрѣзка MN (опредѣленіе VIII).

Теорема XIII. Если отрѣзокъ MN больше отрѣзка PQ, то отрѣзокъ PQ меньше отрѣзка MN.

Доказательство. Такъ какъ точка N принадлежитъ лучу QP', а точка M принадлежитъ лучу QP, то точки N и M лежатъ на разныхъ лучахъ по отношенію къ точкѣ Q (опредѣленіе V); но въ такомъ случаѣ точки M и N расположены по разныя стороны отъ точки Q (постулатъ II), т. е. точка Q есть внутренняя точка отрѣзка MN (опредѣленіе VII); но это значитъ, что отрѣзокъ PQ меньше отрѣзка MN (опредѣленіе VIII).

Теорема XIV. Если отрѣзокъ MN меньше отрѣзка PQ, а отрѣзокъ PQ меньше отрѣзка RS, то отрѣзокъ MN меньше отрѣзка RS.

Доказательство. Допустимъ, что при наложеніи, указанномъ въ опредѣленіи VIII, точка M совпала съ точкой P, а точка P — съ точкой R. Такъ какъ точка N есть внутренняя точка отрѣзка PQ, т. е. отрѣзка RQ, а Q есть внутренняя точка отрѣзка RS, то точка N есть

внутренняя точка отрѣзка RS: въ самомъ дѣлѣ, согласно теоремѣ VIII, 2^0, точка N принадлежитъ отрѣзку RS; но въ такомъ случаѣ, согласно теоремѣ VIII, 1, точка не принадлежитъ отрѣзку QS (ибо она отлична отъ точки Q и принадлежитъ отрѣзку RQ), и, слѣдовательно, отлична отъ точки S.

Звѣздная вселенная, какъ динамическая система.

А. Эддингтона.

Область, которой интересуется астрономія, естественнымъ образомъ распадается на двѣ части. Прежде всего мы имѣемъ группу небесныхъ тѣлъ, находящихся подъ непосредственнымъ вліяніемъ солнца и образующихъ солнечную систему. Въ отношеніи этой системы знанія наши ушли сравнительно далеко впередъ; въ частности мы имѣемъ точныя свѣдѣнія о движеніи тѣлъ этой системы; силы, которыя управляютъ этимъ движеніемъ, подробно изучены. Что касается второй части астрономіи, то она насъ уноситъ въ гораздо болѣе отдаленныя области мірового пространства, относительно которыхъ мы обладаемъ менѣе точными знаніями. До сихъ поръ изученіе динамики небесныхъ тѣлъ этихъ областей, т. е. изученіе взаимодѣйствія силъ, вызывающихъ движенія этихъ тѣлъ и ихъ регулирующихъ, весьма мало подвинулось впередъ. Великая система звѣздъ по степени своей сложности, грубо выражаясь, въ милліонъ разъ превосходитъ планетную систему. Въ противоположность правильности движеній вокругъ центральнаго тѣла, которую мы замѣчаемъ въ солнечной системѣ, движенія звѣздъ на первый взглядъ представляются намъ въ высшей степени хаотичными и не управляемыми никакими законами. Правда, въ рядѣ случаевъ мы находимъ пары звѣздъ, вращающихся одна вокругъ другой по тѣмъ же самымъ законамъ, по которымъ земля вращается вокругъ солнца. Однако, по отношенію къ великой системѣ звѣздъ эти двойныя звѣзды являются лишь отдѣльными единицами или частицами, подобно тому, какъ всю солнечную систему слѣдуетъ разсматривать лишь какъ отдѣльную единицу среди миріадъ единицъ ей подобныхъ. Вселенная состоитъ изъ системъ, включенныхъ одна въ другую. Въ настоящей статьѣ мы займемся системой самой обширной, включающей въ себѣ всѣ остальныя системы (насколько мы съ ними знакомы при современномъ состояніи нашихъ знаній).

Для правильнаго развитія всякаго научнаго вопроса должно быть сохранено извѣстное равновѣсіе между теоріей и наблюденіемъ. Когда теорія слишкомъ далеко опережаетъ наблюденія и занимается вопросами, не имѣющими непосредственнаго отношенія къ чему-либо, что

можетъ быть наблюдаемо въ дѣйствительности, то она вскорѣ становится безплодной и безполезной. Съ другой стороны, простое накопленіе наблюденій и даже обобщеній, основанныхъ на этихъ наблюденіяхъ, становится безцѣльнымъ и неорганизованнымъ, если мы не получимъ какой-либо объединяющей теоретической идеи. Успѣхи наблюденія въ области нашихъ знаній о звѣздной системѣ за послѣдніе годы очень велики; и въ настоящее время можно съ увѣренностью утверждать, что попытка понять динамику этой системы вполнѣ находитъ себѣ оправданіе въ фактахъ, установленныхъ въ этой области. Мы можемъ, пожалуй, пойти дальше и сказать, что теоретическое изученіе динамики звѣздной системы съ настойчивостью выдвигается новѣйшими практическими успѣхами.

Мы должны заняться системой, состоящей не меньше, чѣмъ изъ тысячъ милліоновъ звѣздъ, отстоящихъ одна отъ другой въ среднемъ приблизительно на 20 трилліоновъ (2×10^{13}) миль. Можно считать почти достовѣрнымъ, что не существуетъ звѣзды, значительно превосходящей всѣ другія по своей массѣ, и могущей управлять движеніями всего этого обширнаго скопленія тѣлъ, — что не существуетъ центральнаго солнца. Дѣйствительно, насколько можно было опредѣлить массы звѣздъ было установлено, что массы эти сравнительно мало варьируетъ. Несмотря на то, что нѣкоторыя звѣзды испускаютъ свѣта въ милліонъ разъ больше, чѣмъ другія, можно считать невѣроятнымъ, чтобы существовало много небесныхъ тѣлъ, масса которыхъ была бы больше, чѣмъ удесятеренная масса солнца; столь же невѣроятно существованіе многихъ тѣлъ, масса которыхъ меньше одной десятой части массы солнца. Такимъ образомъ, какова бы ни была сила, опредѣляющая путь каждаго небеснаго тѣла въ отдѣльности, она должна быть вызвана не однимъ преимущественнымъ притяженіемъ, но совокупностью притяженій милліоновъ звѣздъ, притяженій въ отдѣльности незначительныхъ. Многія изъ нихъ направлены въ противоположныя стороны и нейтрализуютъ другъ друга; но въ большинствѣ направленій силы не вполнѣ нейтрализуются, и въ результатѣ получается сила, направленная болѣе или менѣе къ центру всего скопленія звѣздъ, производящихъ притяженіе.

Интересно отмѣтить, на сколько мало отдѣльная звѣзда вліяетъ на движеніе другихъ звѣздъ. Возьмемъ для примѣра эффектъ, производимый на своихъ сосѣдей солнцемъ, которое мы должны считать типичной звѣздой. Ближайшая къ намъ звѣзда есть α Центавра, крайне яркая звѣзда южнаго полушарія. Сила притяженія, производимая солнцемъ на α Центавра сообщаетъ ей въ теченіе года скорость въ сантиметръ за часъ. Будучи подверженной этой силѣ притяженія въ теченіе столѣтія, звѣзда эта должна была бы двигаться со скоростью болѣе медленной, чѣмъ скорость передвиженія улитки. Вліяніе солнца на всякую другую звѣзду еще меньше. Однако, и эта малая сила могла бы достигнуть болѣе или менѣе замѣтной величины въ теченіе милліоновъ лѣтъ, если бы α Центавра и солнце оставались въ настоящемъ

ихъ положенiи достаточно долгое время. Но дѣло въ томъ, что разстоянiе между этими звѣздами не постоянно, и движенiя ихъ, независимыя между собою, должны увеличить разстоянiе между ними. Черезъ 150000 лѣтъ разстоянiе это должно удвоиться. Такимъ образомъ, прежде чѣмъ сообщенная α Центавра скорость достигнетъ метра въ секунду, звѣзда эта удалится на разстоянiе, которое практически можно считать находящимся внѣ досягаемости солнечнаго притяженiя.

Такимъ образомъ, ясно, что эффектъ дѣйствiя отдѣльной звѣзды незначителенъ, и мы должны считать силой, достаточной для того, чтобы направить движенiе звѣздъ по ихъ орбитамъ, лишь ту силу, которая составляется изъ притяженiй миллiоновъ звѣздъ. Влiянiе, которое производится всей совокупностью звѣздъ болѣе дѣйствительно по двумъ причинамъ: во-первыхъ — потому, что оно болѣе интенсивно, а во-вторыхъ — потому, что оно дѣйствуетъ постоянно въ одномъ направленiи въ теченiе долгаго перiода времени. Къ счастью, несмотря на наше весьма несовершенное знакомство съ размѣрами вселенной, имѣется очень простой способъ, пригодный для вычисленiя влiянiя всей звѣздной системы на движенiе звѣздъ. Хорошо извѣстно изъ механики правило, которое гласитъ, что, если частица движется внутри сферы изъ вещества равномѣрной плотности и подъ влiянiемъ притяженiя этого вещества, то время, въ теченiе котораго частица описываетъ орбиту, не зависитъ ни отъ величины сферы ни отъ величины орбиты, а можетъ быть вычислено непосредственно и исключитсльно на основанiи плотности вещества. Конечно, въ этомъ нельзя убѣдиться при условiяхъ лабораторнаго эксперимента, такъ какъ въ теорiи предполагается, что частица движется свободно черезъ матерiальную среду, а на практикѣ среда эта сопротивляется этому движенiю. Что же касается звѣздной вселенной, то здѣсь выполнены требуемыя указаннымъ правиломъ условiя. Частица, въ данномъ случаѣ звѣзда, движется свободно черезъ междузвѣздныя пространства, а звѣзды, — при томъ предположенiи, что онѣ разбросаны достаточно равномѣрно, — должны производить дѣйствiе аналогичное дѣйствiю среды равномѣрной плотности. И вотъ для того, чтобы узнать приблизительно перiодъ, въ теченiе котораго звѣзда описываетъ свою орбиту, нужно только знать среднюю плотность звѣздной вселенной, т. е. количество вещества въ единицѣ ея объема.

Плотность эту мы можемъ вычислить, зная количество звѣздъ въ опредѣленномъ объемѣ пространства и приписывая каждой звѣздѣ нѣкоторый средней вѣсъ, установленный на основанiи произведенныхъ измѣренiй. Но, справедливо возразятъ намъ здѣсь, у насъ не можетъ быть увѣренности въ томъ, что мы подсчитали всѣ звѣзды, заключающiяся въ извѣстномъ объемѣ. По всему вѣроятiю, нетрудно внести извѣстную поправку относительно количества звѣздъ, не вошедшихъ въ нашъ счетъ благодаря нашему недостаточному знакомству съ раз-

стояніями между ними. Однако, можетъ существовать извѣстное количество погасшихъ или почти погасшихъ свѣтилъ, о которыхъ мы не имѣемъ никакого представленія. Поэтому вмѣсто того, чтобы дѣлать попытку внести извѣстную поправку въ послѣднемъ отношеніи, что было бы совершенно гадательнымъ, мы удовольствуемся вычисленіемъ минимума плотности, основанномъ на подсчетѣ звѣздъ намъ замѣтныхъ. Придерживаясь того же принципа, съ цѣлью избѣгнуть возможности переоцѣнки, мы примемъ, что звѣзда въ среднемъ заключаетъ въ себѣ одну треть массы солнца. Принимая этотъ низшій предѣлъ плотности, мы получаемъ періодъ въ 300 милліоновъ лѣтъ. Величина періода обратно пропорціональна квадратному корню изъ плотности; такимъ образомъ, разъ величина, вычисленная для плотности, по всему вѣроятію, слишкомъ мала то для указаннаго періода, повидимому, принята слишкомъ высокая цыфра. Періодъ въ 100 милліоновъ лѣтъ или еще меньше, надо думать, больше соотвѣтствуетъ истинѣ; но для нашихъ цѣлей удобнѣе взять высшій предѣлъ для указаннаго періода.

Нельзя предположить, что траекторіи звѣздъ представляютъ изъ себя замкнутыя орбиты. Это могло бы быть лишь въ томъ случаѣ, если бы вселенная была построена очень симметрично. Время потребное для того, чтобы звѣзда продѣлала путь отъ крайняго положенія на одной сторонѣ системы до положенія противоположнаго и обратно, обнимаетъ собою періодъ въ 300 милліоновъ лѣтъ. Въ виду того, что плотность, вѣроятно, уменьшается по направленію къ болѣе периферическимъ частямъ системы, слѣдуетъ полагать, что звѣзды, орбиты которыхъ больше, обладаютъ и большимъ періодомъ обращенія. Однако, разница между періодами обращенія, надо думать, невелика, и указанная цифра относится къ большинству доступныхъ наблюденію звѣздъ.

Принимая во вниманіе величину періода, нельзя ожидать, чтобы звѣзда за то время, въ теченіе котораго за нею наблюдали, могла замѣтно отклониться отъ прямолинейнаго движенія. И все таки 300 милліоновъ лѣтъ не могутъ считаться долгимъ періодомъ въ исторіи образованія и развитія звѣздной системы. Изъ обычно принимаемыхъ для возраста земли цифръ самой достовѣрной слѣдуетъ считать цифру, установленную проф. Стрёттомъ (Strutt) на основаніи количества гелія, заключающагося въ радіоактивныхъ минералахъ. Имѣются основательныя данныя, заставляющія полагать, что возрастъ самыхъ древнихъ земныхъ горныхъ породъ колеблется между 400 и 800 милліонами лѣтъ. Очевидно, что исторія звѣзды обнимаетъ собою еще большее количество времени. Нужно считать, что земля, сопровождая солнце, не одинъ разъ совершала путь туда и обратно черезъ вселенную въ теченіе геологическихъ періодовъ. Звѣздныя орбиты представляютъ изъ себя не просто теоретическія кривыя, а пути, по которымъ звѣзды дѣйствительно двигались въ прошломъ и притомъ не одинъ разъ.

Одинъ пунктъ заслуживаетъ здѣсь нашего особеннаго вниманія, ибо отъ него зависитъ возможность сведенія звѣздной динамики къ

точной математической формулировкѣ. Всякій разъ, когда къ реальнымъ объектамъ природы примѣняется математическій методъ, является необходимость идеализировать до нѣкоторой степени проблему, т. е. вмѣсто реальныхъ условій подставить условія упрощенныя, по возможности подходящія къ реальнымъ. Невозможно въ одинъ пріемъ принять во вниманіе безконечную сложность природы; для того чтобы достигнуть цѣли, научное изслѣдованіе должно пренебречь наименѣе существенными подробностями. Мы знаемъ, что производящая притяженіе матерія распредѣлена въ природѣ не въ видѣ сплошной массы, а въ видѣ отдѣльныхъ скопленій звѣздъ, съ широкими пустыми промежутками между ними. Кромѣ того звѣзды распредѣлены не съ геометрической правильностью, а съ промежутками различной величины согласно законамъ вѣроятностей. Большое упрощеніе можетъ быть достигнуто, если мы въ своихъ разсужденіяхъ замѣнимъ скопленія матеріи съ промежутками между ними сплошной средой; тогда мы будемъ въ состояніи вычислять силы притяженія, предполагая, что матерія распредѣлена съ той же средней плотностью, но съ устраненіемъ всѣхъ случайныхъ неправильностей. Законность такого упрощенія никоимъ образомъ нельзя считать очень очевидной, какъ это представляется на первый взглядъ; дѣйствительно, упрощеніе это находится въ прямомъ противорѣчіи съ тѣми принципами, которые покойный проф. Пуанкаре (Poincaré) и нѣкоторые другіе старались примѣнить къ изслѣдованію динамики звѣздной вселенной. Пуанкаре предложилъ провести аналогію между звѣздами и молекулами газа и примѣнить результаты кинетической теоріи газовъ къ звѣздной системѣ, ибо въ обоихъ случаяхъ мы имѣемъ очень большое число отдѣльныхъ частицъ, движущихся по самымъ разнообразнымъ направленіямъ. Если же мы примемъ вышеуказанное упрощеніе, то исчезаетъ самое основаніе для аналогіи съ газами, такъ какъ упрощеніе состоитъ въ томъ, что оно игнорируетъ прерывистость матеріи. Такимъ образомъ, мы здѣсь поставлены передъ необходимостью сдѣлать выборъ между двумя теоріями динамики звѣздной системы. По мнѣнію пишущаго эти строки, въ настоящее время не можетъ быть колебаній на счетъ того, какой теоріи отдать предпочтеніе. Аналогія съ газами ложна, и теорія, претендующая на дальнѣйшее правильное развитіе, должна разсматривать движенія звѣздъ, какъ такія движенія, для которыхъ практически можно установить причинную связь съ притяженіемъ матеріи, распредѣленной въ видѣ сплошной массы.

Основнымъ явленіемъ, на которомъ основана кинетическая теорія газовъ, является частое столкновеніе между молекулами. Мы не можемъ предположить, что звѣзды сталкиваются и отталкиваются одна отъ другой подобно молекуламъ; однако, при всякомъ приближеніи двухъ звѣздъ, когда онѣ движутся одна мимо другой, происходитъ между ними обмѣнъ количествъ движенія, который въ концѣ концовъ долженъ приводить къ тому же, что и болѣе внезапныя встрѣчи между молекулами. Случайныя возмущенія въ движеніи, производимыя звѣздой

на своихъ временныхъ сосѣдей, имѣютъ тенденцію приводить къ тѣмъ же результатамъ, что и при столкновеніи молекулъ въ газахъ. Но прежде чѣмъ сдѣлать тотъ выводъ, что вслѣдствіе этого можно теорію, аналогичную теоріи динамики газовъ, примѣнить къ звѣздной сисемѣ, мы должны принять также во вниманіе и то обстоятельство, какъ процессы эти протекаютъ во времени. Измѣненіе распредѣленія скоростей, на которое ссылается кинетическая теорія газовъ, устанавливается въ газахъ въ теченіе доли секунды; а между тѣмъ можно доказать, что въ звѣздной системѣ процессъ этотъ протекаетъ такъ медленно, что должно пройти невообразимо огромное время, прежде чѣмъ произойдетъ какой-либо замѣтный прогрессъ въ этомъ отношеніи. Въ теченіе 300 милліоновъ лѣтъ, нужныхъ звѣздѣ для того, чтобы описать орбиту, эффектъ возмущенія движенія производимый какой-либо отдѣльной сосѣдней звѣздой, совершенно незначителенъ. Это отчасти вытекаетъ изъ нашихъ соображеній о незначительности вліянія солнца на α Центавра, но это является также результатомъ болѣе детальнаго вычисленія. Впрочемъ, надо имѣть въ виду, что въ теченіе очень долгаго періода времени такихъ безконечно малыхъ вліяній будетъ много, а незначительные случайные эффекты (быть можетъ, въ противоположность общераспространеннымъ представленіямъ) не пропадаютъ, а имѣютъ тенденцію складываться и давать въ результатѣ нѣчто значительное.

Мы только что указали на то, что заключеніе о незначительности возмущающаго дѣйствія на движеніе звѣзды, производимаго ея сосѣдями, основано на вычисленіяхъ; но наиболѣе очевидное доказательство можно обосновать на непосредственномъ наблюденіи. Было выдѣлено нѣкоторое число звѣздныхъ группъ, извѣстныхъ подъ названіемъ „движущихся роевъ"; члены этихъ группъ, хотя и отдѣлены другъ отъ друга обычными междузвѣздными разстояніями, обладаютъ общимъ движевіемъ въ пространствѣ. Хорошимъ примѣромъ можетъ служить рой Тельца, изученный покойнымъ проф. Боссомъ (Boss); около 40 звѣздъ этого роя движутся вмѣстѣ черезъ пространство, при чемъ движенія ихъ оказываются вполнѣ одинаковыми и параллельными. Объемъ, занимаемый этимъ роемъ, легко можетъ быть вычисленъ; и вотъ оказывается, что въ этомъ пространствѣ, если считаться съ обычными условіями, должны еще заключаться 30 или того больше звѣздъ, которыя, не имѣя ничего общаго съ группой, случайно разбросаны въ пространствѣ. Вѣдь нельзя предположить, что для группы имѣется спеціальный свободный отъ небесныхъ тѣлъ проходъ; рой долженъ совершать свое движеніе черезъ область, наполненную звѣздами, не принадлежащими къ его составу, и эти звѣзды должны свободно проходить между членами роя. Возмущающій эффектъ этихъ протискивающихся въ группу звѣздъ долженъ былъ бы состоять въ томъ, чтобы отталкивать входящіе въ составъ роя небесныя тѣла съ одной стороны въ одномъ направленіи, а съ другой въ другомъ, т. е. долженъ былъ бы привести къ нарушенію группировки членовъ роя и къ уничтоже-

нію параллелизма ихъ движеній. А между тѣмъ тотъ фактъ, что указанный рой (содержащій звѣзды, находящіяся въ позднѣйшей стадіи развитія) вышелъ побѣдителемъ при этихъ попыткахъ разстроить его, показываетъ, что возмущенія, производившіяся проходящими мимо звѣздами до сихъ поръ не дали замѣтнаго результати въ смыслѣ отклоненія движенія.

Итакъ, доводы, основанные какъ на теоріи, такъ и на наблюденіи, приводятъ насъ къ убѣжденію, что встрѣчи звѣздъ между собою въ прошлой исторіи системы не имѣли достаточно времени для того, чтобы влiять на движенія. Предложенное упрощеніе — а именно, разсматривающее вещество, производящее притяженіе, какъ разсѣянное въ видѣ сплошной массы, а не какъ сконцентрированное въ отдѣльныхъ точкахъ — такимъ образомъ вполнѣ законно. Мы совершенно отвергаемъ гипотезу о томъ, что теорія, аналогичная кинетической теоріи газовъ, можетъ быть примѣнена къ звѣздной системѣ, такъ какъ указанная теорія имѣетъ дѣло съ состояніемъ, по направленію къ которому эта система не сдѣлала еще сколько-нибудь замѣтныхъ шаговъ впередъ.

Однимъ изъ самыхъ интересныхъ примѣненій концепціи о звѣздной вселенной, какъ о динамической системѣ, является объясненіе явленія „двухъ звѣздныхъ потоковъ“. Окажется ли это спеціальное примѣненіе теоріи правильнымъ или нѣтъ, вопросъ объ этомъ можетъ быть оставленъ открытымъ. Мы поставили себѣ здѣсь цѣлью показать, что необходимость разсматривать динамику звѣздъ подъ извѣстнымъ угломъ зрѣнія навязывается намъ результатами наблюденія, и что теорія въ данномъ случаѣ является не безплоднымъ умствованіемъ, а что ее можно привести въ связь съ практическими результатами, могущими въ свою очередь давать руководящій толчекъ теоріи. Существованіе двухъ звѣздныхъ потоковъ есть фактъ хорошо обоснованный; звѣзды, движенія которыхъ мы измѣряемъ, движутся не въ какомъ угодно направленіи, а имѣютъ явно выраженную тенденцію двигаться въ двухъ излюбленныхъ направленіяхъ, противоположныхъ одно другому. Здѣсь можно провести аналогію съ судами движущимися предпочтительно по теченію рѣки или противъ него, а не поперекъ рѣки. Является вопросъ, каковъ смыслъ этой линіи движенія, которая избирается на первый взглядъ самопроизвольно изъ всѣхъ возможныхъ направленій въ пространствѣ? Проф. Турнеръ (Turner) высказалъ предположеніе, что эта линія направлена къ центру звѣздной вселенн и обратно. Это предположеніе можетъ быть поддержано аналогіей съ кометами въ солнечной системѣ. Въ виду того, что послѣднія обладаютъ очень удлиненными орбитами, то онѣ движутся главнымъ образомъ въ радіальномъ направленіи, и наблюдателю, напримѣръ, на Нептунѣ, который различалъ бы лишь кометы близкія къ нему, казалось бы, что послѣднія движутся въ видѣ двухъ потоковъ по направленію къ солнцу и обратно. Согласно аналогичной точкѣ зрѣнія, звѣзды

при самомъ своемъ возникновеніи обладаютъ очень малымъ движеніемъ или совсѣмъ имъ не обладаютъ (нѣкоторыя данныя, основанныя на наблюденіи, подтверждаютъ это), и свойственная имъ скорость движенія пріобрѣтается ими главнымъ образомъ при приближеніи къ центру системы. Ясно, что въ такомъ случаѣ мы должны ожидать, что будутъ превалировать движенія, имѣющія направленіе радіальное.

Здѣсь само собою возникаетъ очень естественное возраженіе. Если звѣзды движутся предпочтительно по радіусамъ, по направленію къ центру звѣздной системы, то вѣдь нужно считать, что близъ центра системы, гдѣ сходятся столько направленій движенія, должны наблюдаться страшныя столкновенія или по крайней мѣрѣ большое скопленіе звѣздъ. Противъ этого возраженія слѣдуетъ привести тотъ фактъ, что по законамъ движенія, звѣзды должны двигаться медленнѣе въ наружныхъ частяхъ своихъ орбитъ и быстрѣе вблизи центра; такимъ образомъ онѣ имѣютъ тенденцію съ поспѣшностью совершать свой путь черезъ опасную зону и уменьшать такимъ образомъ возможность скопленія. Вопросъ о равновѣсіи между двумя указанными тенденціями поддается точному математическому изслѣдованію, которое приводитъ къ тому выводу, что послѣдняя тенденція можетъ взять верхъ. Нѣтъ никакой необходимости въ томъ, чтобы въ центрѣ существовала большая концентрація; безъ сомнѣнія, скопленіе звѣздъ въ центрѣ системы должно превосходить скопленіе ихъ вблизи солнца не больше, чѣмъ въ пять или шесть разъ. Въ обыденной жизни мы, конечно, не будемъ пользоваться указаннымъ методомъ, чтобы избѣжать столкновеній, — мы не будемъ гнать быстро своего экипажа въ мѣстахъ опасныхъ скрещеній улицъ — но въ условіяхъ звѣздной системы этотъ методъ даетъ хорошіе результаты.

Распредѣленіе скоростей движенія звѣздъ, включая сюда свойство движенія по потокамъ, было изящно обобщено проф. Шварцшильдомъ (Schwarzschild) въ видѣ такъ называемаго эллипсоидальнаго закона. Этотъ законъ выражаетъ въ главныхъ чертахъ, хотя и не во всѣхъ подробностяхъ, скорость движенія звѣздъ, установленную наблюденіемъ. Очень интересно то, что посредствомъ указаннаго закона можно математически построить точную модель звѣздной системы, могущую оставаться устойчивой въ теченіе неопредѣленно долгаго времени. Согласно этому построенію система имѣетъ форму шара, при чемъ густота расположенія звѣздъ уменьшается въ наружномъ направленіи, а явленіе звѣздныхъ потоковъ объясняется движеніемъ звѣздъ предпочтительно въ радіальномъ направленіи, какъ это предполагаетъ также проф. Турнеръ. Изъ разсмотрѣнія модели Шварцшильда слѣдуетъ, что преобладанія предпочтительнаго движенія, т. е. движенія по потокамъ, надъ неправильными движеніями, должно увеличиваться по мѣрѣ удаленія отъ центра. Зная скорость движенія звѣздъ, окружающихъ солнце, мы можемъ вычислить, на какомъ разстояніи находится солнце отъ центра звѣздной вселенной. Оказывается, что раз-

стояніе это больше, чѣмъ это обычно предполагали; и, хотя имѣется мало данныхъ, которыя говорили бы противъ указаннаго вычисленія, но мы нѣсколько колеблемся, слѣдуетъ ли его признать или нѣтъ.

Для того чтобы получить болѣе точную модель вселенной, какъ она существуетъ въ дѣйствительности, мы должны принять во вниманіе тотъ твердо установленный фактъ, что звѣзды собраны не въ шарообразной формѣ, но въ видѣ очень сплющенной массы. Здѣсь опять теоретическое изслѣдованіе даетъ результаты, могущіе пріобрѣсти практическій интересъ. Можно доказать, что эллипсоидальный законъ скоростей можетъ быть примѣненъ только въ сферической системѣ. Ни для какого другого геометрическаго тѣла не можетъ быть примѣненъ точно формулированный законъ проф. Шварцшильда,— все равно, будетъ ли система находиться въ устойчивомъ состояніи или нѣтъ; мало того, если представить себѣ что эллипсоидальный законъ вступитъ въ свои права, то тотчасъ же система начнетъ отступать отъ него. Можетъ быть, это прольетъ, наконецъ, нѣкоторый свѣтъ на извѣстныя отступленія отъ этого закона, открытыя наблюденіемъ.

Перейдемъ теперь къ другому новѣйшему открытію, добытому наблюденіемъ и приводящему почти съ необходимостью къ изученію звѣздной динамики. Было найдено, что средняя скорость движенія звѣзды въ большой степени зависитъ отъ ихъ природы. Звѣзды, спектры которыхъ указываютъ на то, что онѣ находятся въ ранней стадіи развитія (согласно обычной точкѣ зрѣнія) движутся медленно; звѣзды же, находящіяся въ болѣе поздней стадіи, движутся быстро. Въ послѣднее время оказалось весьма вѣроятнымъ, что кромѣ того имѣется зависимость отъ яркости, именно при однихъ и тѣхъ же спектрахъ яркія звѣзды движутся медленно, а неяркія быстро. Возможно, что истинная связь, включающая въ себѣ оба вышеуказанныхъ отношенія, существуетъ между скоростью и массой, такъ какъ обычно звѣзды самаго ранняго типа и самыя яркія вмѣстѣ съ тѣмъ и самыя тяжелыя. Дѣйствительно легко доказать, что болѣе массивныя звѣзды должны развиваться медленнѣе, и что при прочихъ равныхъ условіяхъ онѣ должны испускать больше свѣта. И вотъ было выдвинуто нѣсколько гипотезъ, основанныхъ на той точкѣ зрѣнія, что масса есть дѣйствительный опредѣляющій факторъ. Д-ръ Хальмъ (Halm) указалъ на то, что звѣзды въ этомъ отношеніи являютъ собою весьма соблазнительную аналогію съ молекулами газовъ. Въ смѣси, состоящей изъ кислорода и водорода, болѣе легкіе водородные молекулы движутся въ среднемъ съ быстротой въ четыре раза большей, чѣмъ болѣе тяжелыя молекулы кислорода, что вполнѣ согласуется съ закономъ равномѣрнаго распредѣленія энергіи. Это приводитъ къ предположенію, что разница между скоростью движенія болѣе легкихъ и болѣе тяжелыхъ звѣздъ объясняется той же причиной. Но мы уже научились относиться съ подозрѣніемъ къ примѣненію законовъ, отно-

сящихся къ газамъ, къ законамъ о звѣздахъ. Вѣдь равномѣрное распредѣленіе энергіи между молекулами происходитъ отъ встрѣчъ между ними, а этими встрѣчами, какъ мы видѣли, можно вполнѣ пренебречь въ вопросѣ о скорости движенія звѣздъ. Мало того, равномѣрное распредѣленіе энергіи является однимъ изъ наиболѣе медленно проявляющихся результатовъ встрѣчъ, такъ что, если бы даже вліяніемъ случайныхъ встрѣчъ между звѣздами въ другихъ отношеніяхъ можно было бы и не пренебречь, то поскольку это касается равномѣрнаго распредѣленія энергіи имъ можно было бы пренебречь навѣрное.

Само собою напрашивается другое предположеніе. Если звѣзды въ началѣ своего движенія обладаютъ очень малой скоростью, то потомъ, когда онѣ начинаютъ приближаться къ центру подъ вліяніемъ общаго притяженія системы, скорость ихъ движенія все болѣе увеличивается. Это на первый взглядъ должно намъ объяснить, почему скорость увеличивается по мѣрѣ видимаго возраста звѣздъ. Но это постоянное увеличеніе скорости движенія должно длиться только въ теченіи первой половины періода полнаго обращенія, самое большее около 150 милліоновъ лѣтъ; послѣ этого скорость должна періодически то уменьшаться, то увеличиваться. Такъ какъ мы не можемъ считать, что полное развитіе звѣзды, начиная отъ самаго ранняго до позднѣйшаго періода, ограничивается временемъ нѣсколько меньшимъ, чѣмъ 150 милліоновъ лѣтъ, то указанное предположеніе слѣдуетъ считать явно неподходящимъ. Никакъ невозможно принять такую низкую цифру для возраста звѣздъ.

Съ болѣе общей точки зрѣнія скорость движенія звѣзды въ настоящій моментъ цѣликомъ зависитъ: 1) отъ ея первоначальной скорости, 2) отъ потенціала тяготѣнія, существовавшаго въ звѣздной системѣ въ мѣстѣ первичнаго появленія звѣзды, 3) отъ потенціала соотвѣтствующаго ея положенію въ настоящій моментъ*). Для того, чтобы объяснить зависимость между скоростью движенія звѣзды и ея типомъ, слѣдуетъ предположить, что какая-нибудь изъ этихъ трехъ величинъ систематически различна для различныхъ типовъ звѣздъ. Разсмотрѣвши нѣсколько этотъ вопросъ, мы приходимъ къ заключенію, что двѣ изъ этихъ величинъ мы можемъ считать не имѣющими значенія въ данномъ отношеніи. Самымъ простымъ предположеніемъ будетъ то, что прямое отношеніе къ типу (или массѣ) звѣзды имѣетъ начальный потенціалъ. Другими словами, предполагается, что звѣзды, обладающія большой скоростью, пріобрѣли таковую потому, что онѣ появились въ мѣстахъ съ низкимъ потенціаломъ — въ самыхъ наружныхъ частяхъ звѣздной системы, — и что имъ потому пришлось про-

---

*) Уравненіе живыхъ силъ будетъ слѣдующее: $\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} v_0^2 + \varphi - \varphi_0$, гдѣ v и v_0 суть скорость въ настоящій моментъ и скорость начальная, а φ и φ_0 потенціалъ въ настоящій моментъ и начальный. Это уравненіе не подходитъ для теоріи, принимающей аналогію съ газами; здѣсь принимается доказаннымъ, что эффектомъ встрѣчъ можно пренебречь.

дѣлать большой путь для того, чтобы подъ вліяніемъ центральнаго притяженія прійти къ настоящему своему положенію. Звѣзды, обладающія небольшой скоростью, образовались гораздо ближе къ центру, гдѣ потенціалъ былъ близокъ къ тому, который существуетъ въ мѣстѣ ихъ положенія въ данный моментъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему приблизительному представленію объ эволюціи звѣздной системы. Первичный матеріалъ для образованія звѣздъ, какъ это естественнѣе всего предположить, былъ распредѣленъ такимъ образомъ, что плотность его была наибольшей въ центрѣ вселенной и постепенно убывала по направленію къ периферіи. Въ периферическихъ частяхъ, гдѣ количество матеріала было скудно, должны были образоваться звѣзды, обладающія небольшой массой. Это суть звѣзды, принадлежащіе къ позднему типу — потому ли, что вслѣдствіе своей малой массы онѣ ускоренно продѣлывали свой циклъ развитія, быстро охлаждаясь, или же потому, что, какъ это предположилъ проф. Рёссель (Russell), небольшая ихъ масса мѣшаетъ развитію въ нихъ высокой температуры, характерной для звѣздъ такъ называемаго ранняго типа. Эти небольшія звѣзды пріобрѣли большую скорость, наблюдаемую нами въ настоящее время, такъ какъ имъ пришлось продѣлать длинный путь отъ периферіи системы до того мѣста, гдѣ онѣ находятся теперь*). Вблизи центра системы, гдѣ матеріалъ отличался большой плотностью и изобиліемъ, образовались крупныя звѣзды. Это звѣзды ранняго типа, такъ какъ онѣ развивались медленно; скорости же ихъ малы, такъ какъ путь продѣланный ими по направленію къ центру очень невеликъ. Эта теорія объясняетъ также нѣкоторыя отношенія, которыя были найдены между распредѣленіемъ и движеніемъ звѣздъ съ одной стороны и плоскостью Млечнаго Пути, — основной плоскостью симметріи вселенной — съ другой. Но эти отношенія слишкомъ сложны для того, чтобы ихъ здѣсь разбирать.

Еще одна интересная проблема возникаетъ по поводу наблюдаемой нами формы звѣздной системы; но мы до сихъ поръ еще не въ состояніи съ успѣхомъ разобраться въ этой проблемѣ. Звѣзды распредѣлены въ видѣ группы сплюснутой формы, нѣсколько похожей на лепешку или, пожалуй, на чечевицу. Частой причиной, превращающей тѣло шаровидное въ тѣло приплюснутое, является вращеніе; и вотъ возникаетъ вопросъ, нельзя ли предположить или даже считать доказаннымъ, что указанная форма распредѣленія звѣздъ вызывается

---

*) Многія изъ этихъ звѣздъ, послѣ того какъ онѣ продѣлали нѣсколько обращеній, должны теперь находиться въ тѣхъ пунктахъ своей орбиты, откуда онѣ начали свой путь и соотвѣтственно этому своему положенію обладать небольшой скоростью; но, находясь въ этихъ пунктахъ, онѣ внѣ предѣловъ нашего наблюденія. Данныя наблюденія предполагаются относящимися главнымъ образомъ къ области близкой къ солнцу и къ центру системы, области весьма малой въ сравненіи съ размѣрами скопленія звѣздъ въ ея совокупности.

вращеніемъ всей системы. Если бы къ вопросу о звѣздной динамикѣ можно было примѣнить теорію газовъ, то почти съ необходимостью мы должны были прійти къ заключенію, что такая форма можетъ поддерживаться только вращеніемъ. Но для той динамической теоріи, къ которой мы пришли, такое заключеніе далеко не столь очевидно. Въ самомъ дѣлѣ, предположеніе объ общемъ вращеніи всей системы въ одну сторону, хотя и обладаетъ нѣкоторой степенью вѣроятія, все таки нисколько не является обязательнымъ. Можно еще прибавить, что степень сплюснутости настолько велика, что при примѣненіи теоріи газовъ существующую фигуру слѣдовало бы съ большой долей вѣроятности считать нестойкой.

Теорія звѣздной динамики для своего развитія необходимо нуждается въ примѣненіи методовъ высшей математики, а это выходитъ за предѣлы настоящей статьи. Кромѣ того тѣ шаги, которые мы сдѣлали до сихъ поръ съ цѣлью разъясненія вопроса, должны считаться лишь попыткой. Мы здѣсь только попытались собрать воедино тѣ отчасти хорошо извѣстныя соображенія, которыя должны опредѣлять нашъ взглядъ на общую природу силъ, воздѣйствующихъ на звѣздную систему. Мы видѣли, что въ одномъ опредѣленномъ пунктѣ дороги расходятся. Одинъ путь приводитъ къ динамической системѣ привычной для насъ, благодаря ея примѣненію къ теоріи газовъ. Мы думаемъ, что можно теперь съ достовѣрностью считать эту систему непригодной. Слѣдуетъ пойти по другому пути. Послѣдній приводитъ насъ къ системѣ совершенно новой, но, безъ сомнѣнія, представляющей не больше математическихъ трудностей, чѣмъ болѣе привычная для насъ молекулярная теорія.

Къ вопросу о представленіи чиселъ подъ видомъ данной квадратичной формы.

А. Турчанинова.

Пусть сравненіе $ax^2 - 2bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ *) имѣетъ рѣшеніе; обозначимъ корень его черезъ m, тогда: $am^2 - 2bm + c \equiv 0 \pmod{p}$. Умножимъ обѣ части сравненія послѣдовательно на $1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$. Получимъ $p-1$ сравненій вида:

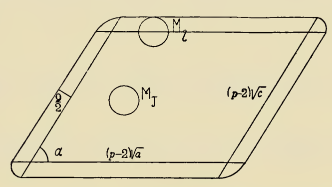
$$ai^2m^2 - 2bi^2m + ci^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, p-1).$$

*) a и c мы предполагаемъ положительными; b можетъ быть и отрицательное, и нуль, но дискриминантъ $b^2 - ac < 0$.

Пусть x_i наименьшій положительный вычетъ числа mi по $\mathrm{mod}\, p$. Тогда:

$$ax_i^2 - 2bx_i i + ci^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1).$$

Обращаемся къ геометрической интерпретаціи и допуская, что $b^2 - ac$, т. е. дискриминантъ, есть число отрицательное, возьмемъ прямолинейную систему координатъ съ угломъ α, косинусъ котораго равенъ $\frac{b}{\sqrt{ac}}$.



Разсмотримъ $p-1$ точекъ M_i съ координатами $x_i\sqrt{a}$, $i\sqrt{c}$. Всѣ эти точки помѣщаются внутри или на периферіи параллелограмма со сторонами $(p-2)\sqrt{a}$ и $(p-2)\sqrt{c}$ и съ угломъ α. Разстояніе двухъ изъ этихъ точекъ

$$\overline{M_iM_j}^{\,2} = (x_i - x_j)^2 a - 2\,(x_i - x_j)\sqrt{a}\,.\,(i-j)\sqrt{c}\,.\cos\alpha + (i-j)^2\,.\,c =$$

$$= a\,(x_i - x_j)^2 - 2\,(x_i - x_j)\,(i-j)\,b + c\,(i-j)^2 \equiv a\,(mi - mj)^2 -$$

$$- 2b\,(mi - mj)\,(i-j) + c\,(i-j)^2 \equiv (i-j)^2\,(am^2 - 2bm + c) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что квадратъ разстоянія любыхъ двухъ нашихъ точекъ есть цѣлое число, кратное p; обозначимъ наименьшее изъ возможныхъ его значеній черезъ ϱ^2. Опишемъ теперь около каждой точки M_i окружность радіусомъ $\varrho/2$. Сумма площадей $p-1$ этихъ окружностей менѣе площади параллелограмма, увеличенной суммой площадей четырехъ прямоугольниковъ, построенныхъ на сторонахъ нашего параллелограмма, какъ на основаніяхъ и имѣющихъ общую высоту $\varrho/2$, и площадью круга съ радіусомъ $\varrho/2$, составленною изъ площадей фигуръ, построенныхъ при четырехъ углахъ параллелограмма. Слѣдовательно:

$$(p-1)\pi\frac{\varrho^2}{4}<(p-2)^2\sqrt{ac}\,.\sin\alpha+2(p-2)\sqrt{a}\cdot\frac{\varrho}{2}+$$

$$+2(p-2)\sqrt{c}\cdot\frac{\varrho}{2}+\pi\frac{\varrho^2}{4};$$

$$(p-2)\pi\frac{\varrho^2}{4}<(p-2)^2\sqrt{ac}\cdot\sin\alpha+(p-2)(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\varrho;$$

$$\pi\frac{\varrho^2}{4}<(p-2)\sqrt{ac}\,.\sin\alpha+(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\varrho;$$

$$3\frac{\varrho^2}{4}<p\sqrt{ac}\,.\sin\alpha+(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\varrho;$$

$$\varrho^2-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\varrho-\frac{4}{3}p\sqrt{ac}\,.\sin\alpha<0.$$

Уголъ α содержится въ промежуткѣ между 0 и π; значитъ уравненіе $z^2-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,z-\frac{4}{3}p\sqrt{ac}\,.\sin\alpha=0$ имѣетъ оба корня вещественные и притомъ разныхъ знаковъ. Полученное неравенство указываетъ, что ϱ должно быть меньше положительнаго корня нашего уравненія. Такъ какъ производныя нашего трехчлена $2z-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})>0$ при $z>\frac{2}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$ и $\varrho>\sqrt{p}$, то трехчленъ, представляющій лѣвую часть нашего уравненія, возрастаетъ при возрастаніи z отъ ϱ до ∞ при условіи $\sqrt{p}>\frac{2}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$ т. е. при $p>\frac{4}{9}(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$. Замѣтивъ это, положимъ $z=\sqrt{2p}$;

$$(\sqrt{2p})^2-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\;.\;\sqrt{2p}-\frac{4}{3}p\sqrt{ac}\,.\sin\alpha=$$

$$=2p-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{2p}-\frac{2}{3}2p\,.\sqrt{ac}\,.\sin\alpha=$$

$$=\sqrt{2p}\left[\sqrt{2p}-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha\,.\sqrt{2p}\right]=$$

$$=\sqrt{2p}\,.\left[\sqrt{2p}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha\right)-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\right].$$

Выраженіе въ прямыхъ скобкахъ будетъ положительнымъ при двухъ условіяхъ:

$$1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha>0\quad\text{и}\quad\sqrt{2p}>\frac{\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha}.$$

Слѣдовательно, при этихъ условіяхъ, нашъ трехчленъ при $z=\sqrt{2p}$ принимаетъ положительное значеніе; онъ возрастаетъ, какъ мы указали выше, отъ $z=\sqrt{p}$ до $z=\infty$; кромѣ того, при $z=\sqrt{p}$, трехчленъ принимаетъ значеніе

$$p-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{p}-\frac{4}{3}p\sqrt{ac}\,.\sin\alpha=$$
$$=p\left(1-\frac{4}{3}\sqrt{ac}\sin\alpha\right)-\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{p},$$

которое будетъ отрицательнымъ при условіи $1-\frac{4}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha<0$.

Соображая все вышесказанное, заключаемъ, что ϱ, будучи болѣе $\sqrt{p}$, не можетъ быть $\geqq\sqrt{2p}$, слѣдовательно, $\varrho^2<2p$ и такъ какъ $\varrho^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$, необходимо должно быть $\varrho^2=p$.

Итакъ, при наличности условій:

$$p>\frac{4}{9}(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2;\quad 1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha>0;\quad \sqrt{2p}>\frac{\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha};$$
$$1-\frac{4}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha<0;\quad \varrho^2=p;$$

т. е. дѣлитель $ax^2-2bx+c$ необходимо представляется квадратичной формой $a\xi^2-2b\xi\eta+c\eta^2$.

Разсмотримъ, что выражаетъ совокупность нашихъ условій.

$$1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha>0;\quad 1-\frac{4}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha<0;\quad \frac{3}{4}<\sqrt{ac}\sin\alpha<\frac{3}{2};$$

$$\frac{9}{16}<ac\sin^2\alpha<\frac{9}{4};\quad ac\sin^2\alpha=ac\left(1-\frac{b^2}{ac}\right)=ac-b^2;\quad \frac{9}{16}<ac-b^2<\frac{9}{4}.$$

Отсюда вытекаетъ, что $ac-b^2$ равно либо 1, либо 2. Далѣе, условіе, $\sqrt{2p}>\dfrac{\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{1-\frac{2}{3}\sqrt{ac}\,.\sin\alpha}$ сводится къ $\sqrt{2p}>\dfrac{\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{1-\frac{2}{3}\sqrt{(ac-b^2)}}$.

Мы удовлетворимъ этому требованію, если

$$\sqrt{2p}>\frac{\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{1-\frac{2}{3}\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{3-2\sqrt{2}},$$

т. е., если

$$p > \frac{1}{2}\frac{16(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2}{(3-2\sqrt{2})^2} = \frac{8}{(3-2\sqrt{2})^2}(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2.$$

Легко убѣдиться, что $\frac{8}{(3-2\sqrt{2})^2} > \frac{4}{9}$, слѣдовательно, принявъ $p > \frac{8}{(3-2\sqrt{2})^2}(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$, мы одновременно удовлетворяемъ обоимъ условіямъ, ограничивающимъ p. Но

$$\frac{8}{(3-2\sqrt{2})^2} < \frac{8}{(3-21,42)^2} = \frac{8}{(0,16^2)} = \frac{8.100^2}{16^2} < 400.$$

Итакъ, за низшій предѣлъ p во всѣхъ случаяхъ можно принять $400(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$. Впрочемъ, для случая $-b^2+ac=1$, нашъ предѣлъ можетъ быть пониженъ. Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь:

$$\sqrt{2p} > \frac{\frac{4}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{1-\frac{2}{3}} = 4(\sqrt{a}+\sqrt{c}), \text{ т. е. } p > \frac{4^2}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2 =$$
$$= 8(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2.$$

Итакъ, для случая $ac-b^2=1$, за низшій предѣлъ для p можно принять $8(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ о представленіи числа подъ видомъ данной квадратичной формы:

Если p есть дѣлитель числа вида $ax^2-2bx+c$ [a и $c>0$] и если дискриминантъ $-ac+b^2$ число отрицательное, по модулю равное 1 или 2, то p можетъ быть представлено квадратичной формой $a\xi^2-2b\xi\eta+c\eta^2$ при $p>8(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$ для $ac-b^2=1$ и при $p>400(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$ для $ac-b^2=2$.

Такимъ образомъ, вопросъ о представленіи числа при указываемыхъ условіяхъ подъ видомъ данной квадратичной формы сводится къ выполненію конечнаго числа испытаній.

Разсмотримъ частные случаи въ видѣ примѣровъ: 1) $b=0$, $ac-b^2=ac=1$, 2: слѣдовательно, или $a=c=1$, или $a=2$; $c=1$, или $a=1$; $c=2$. Въ первомъ случаѣ $p=\xi^2+\eta^2$, если $x^2+1\equiv 0 \pmod p$ и если $p>8(1+1)^2=32$. Исчерпывая непосредственно случаи $p=5$, 13, 17, 29, приходимъ къ извѣстной теоремѣ о представленіи простого числа p вида $4n+1$ подъ формой $\xi^2+\eta^2$.

Два послѣдніе случаи даютъ представленіе p подъ формой $2\xi^2+\eta^2$, если $2x^2+1\equiv 0 \pmod p$ или $x^2+2\equiv 0 \pmod p$ и если

$p > 400(\sqrt{2}+1)^2$, послѣднему условію удовлетворимъ при $p > 3600$. Такимъ образомъ, если $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, т. е. если p имѣетъ видъ $8n+1$, то оно представляется подъ формой $2\xi^2+\eta^2$; для $p < 3600$ необходима непосредственная повѣрка.

2) $b = \pm 1$, $ac - 1 = 1$ или 2. Разсмотримъ первый случай $ac = 2$, т. е. или $a = 2$; $c = 1$ или $a = 1$; $c = 2$. Здѣсь p представляется одной изъ квадратичныхъ формъ $2\xi^2 + \xi + \eta\eta^2$ и $2\xi^2 - \xi\eta + \eta^2$, если удовлетворено одно изъ сравненій $2x^2 \pm x + 1 \equiv 0 \pmod p$ и $x^2 \pm x + 2 \equiv 0 \pmod p$ при $p > 8 \,.\, (\sqrt{2}+1)^2$, т. е. при $p > 8 \,.\, 3^2 = 72$.

Отъ временной комиссіи по учебнымъ пособіямъ.

Совѣтъ Русскаго Физико-Химическаго Общества обратился къ Его Сіятельству г-ну Министру Народнаго Просвѣщенія съ докладною запиской, въ которой было указано на необходимость обезпечить русскую школу учебными пособіями по физикѣ, химіи и космографіи, и достигнуть ея независимости отъ заграничнаго производства. По мнѣнію совѣта, для этой цѣли долженъ быть учрежденъ центральный органъ, который служилъ бы постояннымъ посредникомъ между русскою школою и русскими производителями учебныхъ пособій. При этомъ органѣ должны находиться: выставка учебныхъ пособій, лабораторіи для производства экспертизы этихъ пособій, механическая мастерская, библіотека, образцовые кабинеты по разнымъ спеціальностямъ и др. Въ докладной запискѣ Совѣта Русскаго Физико-Химическаго Общества указаны и другія стороны дѣятельности центральнаго органа. Къ запискѣ приложена подробная смѣта единовременныхъ и ежегодныхъ расходовъ, связанныхъ съ устройствомъ и дѣятельностью этого органа. Аналогичныя предложенія поступали въ Министерство и отъ другихъ учрежденій и частныхъ лицъ.

Письмами на имя проф. О. Д. Хвольсона и проф. С. И. Созонова, г-нъ Министръ изволилъ поручить имъ организовать особую комиссію для всесторонняго обсужденія вопроса, что и было ими исполнено. Въ этихъ письмахъ, г-нъ Министръ Народнаго Просвѣщенія, признавая цѣлесообразнымъ устройство выставокъ приборовъ, указалъ, однако, что для освобожденія русскихъ учебныхъ заведеній отъ необходимости пріобрѣтенія заграничныхъ приборовъ и пособій, слѣдуетъ имѣть въ виду и другіе предметы, входящіе въ курсъ средней и низшей школы, какъ, напримѣръ, естественныя науки, географію исторію и др.

При комиссіи учреждено нынѣ особое Справочное Бюро для выясненія нуждъ школы въ настоящее трудное время и для посредничества между нею и производителями учебныхъ пособій, какъ первый шагъ къ устройству того центральнаго органа, о которомъ говорится въ запискѣ Совѣта Русскаго Физико-Химическаго Общества.

Справочное Бюро обращается настоящимъ циркуляромъ къ учебнымъ заведеніямъ, къ производителямъ учебныхъ пособій, къ ученымъ и педагогическимъ обществамъ и къ редакціямъ журналовъ съ просьбою, всѣми мѣрами содѣйствовать осуществленію важной задачи Бюро, служить посредникомъ между русскою школою и русскимъ производствомъ учебныхъ пособій и дать нашей школѣ возможность освободиться отъ иноземной промышленности. При дружной поддержкѣ заинтересованныхъ сторонъ, Справочное Бюро можетъ надѣяться быстро разростись до намѣчаемыхъ комиссіей размѣровъ будущаго центральнаго органа и выполнить ту великую задачу, которую выдвинуло современное тяжелое положеніе нашей школы.

Въ частности Справочное Бюро обращается со слѣдующими вопросами и просьбами къ учебнымъ заведеніямъ, къ производителямъ учебныхъ пособій, къ ученымъ и педагогическимъ обществамъ и къ редакціямъ журналовъ.

I. Къ учебнымъ заведеніямъ

1. Въ какихъ учебныхъ пособіяхъ ощущается острая нужда? Въ этотъ перечень войдутъ, конечно, и тѣ учебныя пособія, которыя до войны исключительно выписывались изъ-заграницы и относительно производства которыхъ въ Россіи учебному заведенію ничего неизвѣстно.

2. Не пріобрѣтало ли учебное заведеніе какія-либо учебныя пособія отъ мало извѣстныхъ русскихъ производителей? Весьма желательно при этомъ получить точныя свѣдѣнія о пригодности пріобрѣтенныхъ пособій, объ ихъ достоинствахъ и недостаткахъ, а также о желательныхъ въ нихъ улучшеніяхъ. То же самое относится и къ тѣмъ учебнымъ пособіямъ, которыя будутъ пріобрѣтены впослѣдствіи.

Существеннѣйшія свѣдѣнія, почерпнутыя изъ отвѣтовъ учебныхъ заведеній по даннымъ вопросамъ будутъ сообщены Справочнымъ Бюро циркулярами, какъ другимъ учебнымъ заведеніямъ, такъ и производителямъ соотвѣтствующихъ учебныхъ пособій.

II. Къ производителямъ учебныхъ пособій.

1. Какія учебныя пособія изготовляются? Здѣсь имѣются въ виду исключительно только такія учебныя пособія, которыя изготовляются въ Россіи; совершенно исключаются пособія заграничнаго производства. Желательно получить свѣдѣнія, которыя могутъ представить интересъ для учебныхъ заведеній; сюда относятся прейскуранты, каталоги, рисунки, указаніе учебныхъ заведеній, пріобрѣвшихъ данныя учебныя пособія и т. д.

2. Не считается ли желательной экспертиза того или другого учебнаго пособія? Такая экспертиза можетъ быть уже теперь производима по предварительному соглашенію со Справочнымъ Бюро.

3. Въ какихъ предметахъ и матеріалахъ необходимыхъ при производствѣ учебныхъ пособій, чувствуется, въ настоящее время недостатокъ? Желательны самыя подробныя указанія, напримѣръ, на тѣ мѣста, откуда эти предметы или

матеріалы прежде получались; почему ихъ нынѣ въ Россіи достать нельзя, и даже простыя указанія, что мѣсто изготовленія ихъ въ Россіи производителю неизвѣстно.

III. Къ ученымъ и педагогическимъ обществамъ и редакціямъ журналовъ.

Справочное Бюро обращается со слѣдующими просьбами:

1. Напечатать цѣликомъ настоящій циркуляръ въ своихъ изданіяхъ.
2. Сообщить Справочному Бюро свѣдѣнія о производителяхъ учебныхъ пособій, въ особенности о мало извѣстныхъ, кустарныхъ производителяхъ и т. п.
3. Содѣйствовать Бюро всякаго рода совѣтами и указаніями, могущими принести пользу тому дѣлу, которымъ оно занимается, или, вообще, находящимися въ связи съ общимъ вопросомъ объ учебныхъ пособіяхъ.

Предсѣдателемъ выше упомянутой Комиссіи объ учебныхъ пособіяхъ состоитъ проф. О. Д. Хвольсонъ *(Петроградъ, Университетъ, 37)*; товарищемъ предсѣдателя проф. С. И. Созоновъ *(Петроградъ, Петроградская сторона, Большой проспектъ, 44)*.

Завѣдующимъ Справочнымъ Бюро состоитъ Владиміръ Михайловичъ Алтуховъ *(Петроградъ, Петроградская сторона, Малый проспектъ 7, кв. 3)*, и къ нему слѣдуетъ адресовать всю корреспонденцію.

ПИСЬМО ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый государь, г-нъ Редакторъ!

Въ № 644—645 „Вѣстника", на стр. 194—197 помѣщена обширная замѣтка г. П. Курилко о составленномъ имъ сборникѣ задачъ по тригонометріи, при чемъ нѣкоторыя мѣста этой замѣтки не могутъ не вызвать большого недоумѣнія. Такъ, на стр. 195, въ подстрочныхъ примѣчаніяхъ, читаемъ:

*) „... Особенности изложенія и обоснованія курса въ сборникѣ приведены безъ упоминанія о немъ нѣкоторыми докладчиками и оппонентами на 2-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей математики секціи III въ вечернемъ засѣданіи 30 декабря 1913 г.".

**) „... См. особую брошюру «Гоніометрическія (тригонометрическія) уравненія» (къ докладу на 1-мъ Всероссійскомъ Съѣздѣ преподавателей математики)".

На стр. 196, п. 7, читаемъ: „... съ чѣмъ согласились и нѣкоторые докладчики и оппоненты 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики".

Приведенныя мѣста могутъ читателю подать мысль, что г. Курилко выступалъ съ докладами на 1-мъ и 2-мъ Съѣздахъ преподавателей математики. Поэтому, какъ членъ Организаціоннаго Комитета обоихъ упомянутыхъ Всероссійскихъ Съѣздовъ, считаю долгомъ разъяснить, что г. Курилко не былъ докладчикомъ на этихъ Съѣздахъ, а также, что читанныя на нихъ сообщенія и пренія по нимъ не имѣли никакого отношенія къ сборнику задачъ г. Курилко.

Съ совершеннымъ уваженіемъ *І. Чистяковъ.*

БИБЛІОГРАФІЯ.

II. Собственныя сообщенія авторовъ, переводчиковъ и редакторовъ о выпущенныхъ книгахъ.

Авторы, переводчики и редакторы новыхъ сочиненій приглашаются присылать для этого отдѣла краткія сообщенія о выпущенныхъ ими сочиненіяхъ, объ ихъ характерѣ и объ ихъ назначеніи. Къ этимъ сообщеніямъ долженъ быть приложенъ экземпляръ сочиненія. Помѣщая эти сообщенія, редакція сохраняетъ, однако, за собою право помѣстить и независимую рецензію.

С. И. Шохоръ-Троцкій. *Методика ариѳметики для учителей начальныхъ школъ, въ двухъ частяхъ.* Изданіе 8-ое, заново переработанное и значительно дополненное, съ иллюстраціями и чертежами въ текстѣ. Часть І. «Ариѳметика изустныхъ вычисленій, преимущественно надъ числами первой сотни». Стр. VIII + 316. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1915. Ц. 1 руб. 10 к. Часть II. «Ариѳметика письменнаго производства четырехъ дѣйствій и ихъ примѣненій». Стр. VIII + 501. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1916 Ц. 1 руб. 80 к.

Это изданіе книги содержитъ методическое освѣщеніе не только обычно въ начальныхъ школахъ практикуемаго учебнаго ариѳметическаго матеріала, но и нѣкоторыхъ (впрочемъ. не обязательныхъ) упражненій учащихся въ такъ называемыхъ „лабораторныхъ" занятіяхъ, въ рисованіи, черченіи,—начальныхъ элементовъ геометріи, примитивномъ землемѣріи, въ рѣшеніи простѣйшихъ уравненій первой степени съ одной и двумя неизвѣстными, и т. п. Учителю начальной школы надо не только проникнуться идеями, лежащими въ основѣ этихъ упражненій, но сродниться съ ними.

Несмотря на возродившуюся у насъ отчасти подъ вліяніемъ извѣстнаго нѣмецкаго педагога Лайя моду на такъ называемое „изученіе чиселъ" въ этой книгѣ, какъ и въ остальныхъ книгахъ того же автора, попрежнему разрабатывается „метода цѣлесообразныхъ задачъ", въ виду того, что метода изученія чиселъ, помимо ея основныхъ недочетовъ, въ русской начальной школѣ и практически неприемлема: а) у насъ дѣти попадаютъ въ школу, достигнувъ приблизительно 8 милѣтняго возраста, а не 6-лѣтняго, какъ во многихъ другихъ странахъ; б) продолжительность учебнаго года у насъ въ полтора, если не въ два, раза меньше, чѣмъ академическій годъ въ зарубежной начальной школѣ; в) учатся у насъ въ начальной школѣ въ теченіе трехъ

или четырехъ а не въ теченіи шести или даже восьми академическихъ годовъ; г) не отвергая пригодности нѣкоторыхъ пріемовъ такъ называемаго изученія чиселъ для дѣтей дошкольнаго возраста, авторъ считаетъ, что бездушная дисциплина (вѣрнѣе муштровка), которою проникнутъ весь строй нѣмецкой школы, нѣмецкаго дѣтскаго сада и соотвѣтствующая этому строю метода изученія чиселъ, какъ метода обученія ариѳметикѣ, школѣ русской чужда. Этотъ взглядъ проводится авторомъ книги, въ теченіе трехъ слишкомъ десятилѣтій, во всѣхъ его работахъ и книгахъ.

Часть I книги состоитъ изъ восьми главъ, содержаніе которыхъ посвящено слѣдующимъ вопросамъ: глава I — „что такое методика ариѳметики", II — „средства обученія ариѳметики", III — „распредѣленіе курса ариѳметики по годамъ въ начальной школѣ", IV — „ариѳметика чиселъ первыхъ двухъ десятковъ", V — „изустное сложеніе и вычитаніе преимущественно чиселъ первой сотни больше 20-ти", VI — „перемноженіе двухъ чиселъ перваго десятка и соотвѣтствующее дѣленіе", VII — „устныя вычисленія за предѣлами таблицъ четырехъ дѣйствій и чиселъ первой сотни", и VIII — „выразительность рѣчи, жестъ и ритмъ при обученіи ариѳметики".

Въ части II этой книги авторъ постарался о томъ, чтобы методика обученія способамъ письменнаго производства („алгориѳмамъ") четырехъ дѣйствій разработана была подробнѣе, чѣмъ въ предыдущихъ изданіяхъ. Особенно приняты во вниманіе средства, съ помощью которыхъ можно повысить внутренній интересъ учащихся къ способамъ письменнаго производства дѣйствій. Съ большею подробностью разсмотрѣны имъ нѣкоторые вопросы, относящіеся къ логическому обоснованію четырехъ дѣйствій надъ числами. Хотя они, конечно, важны не для учащихся, которымъ область эта недоступна, но для читателя, желающаго какъ слѣдуетъ учить малолѣтнихъ ариѳметикѣ и вообще начальной математикѣ, они необходимы. Въ эту часть книги, между прочимъ, вошли: а) освѣщеніе вопроса о примѣненіи уравненій къ рѣшенію задачъ нѣкоторыхъ родовъ и б) методика дополненій курса ариѳметики элементами начальной геометріи и примитивнаго съ помощью самодѣльныхъ приборовъ землемѣрія.

Во второй части этой книги 11 главъ, изъ которыхъ глава I посвящена раздѣленію ариѳметики письменныхъ вычисленій на ступени и характеру этого курса, II — письменному производству сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ, III — письменному производству умноженія и дѣленія многозначныхъ чиселъ, IV — составнымъ именованнымъ числамъ и дробямъ (обыкновеннымъ и десятичнымъ), V — систематизація ариѳметическихъ понятій въ курсѣ ариѳметики цѣлыхъ чиселъ. VI — систематизаціи и дополнительному отдѣлу въ области ученія о дробяхъ. VII — нѣкоторымъ случаямъ взаимной зависимости величинъ въ ариѳметикѣ. VIII — задачамъ алгебраическаго характера, IX — дополнительному матеріалу въ области начальной геометріи и примитивнаго землемѣрія, X — рѣшенію сложныхъ чисто-ариѳметическихъ задачъ и, наконецъ, XI — нѣкоторымъ частнымъ вопросамъ обученія ариѳметикѣ.

Въ книгѣ этой авторъ принялъ во вниманіе интересы не только учителей, начальныхъ школъ съ 3-хълѣтнимъ и 4-хълѣтнимъ курсомъ, но и школъ начальныхъ съ болѣе продолжительнымъ курсомъ, въ томъ числѣ и школъ начальныхъ, называемыхъ высшими начальными.

Дабы облегчить возможность быстраго наведенія справокъ по разнымъ вопросамъ, книга снабжена алфавитнымъ указателемъ разсматриваемыхъ въ ней вопросовъ, занимающимъ безъ малаго 11 страницъ. По сравненію съ 7-мъ изданіемъ книги она увеличилась болѣе чѣмъ въ 2½ раза.

С. И. Шохоръ-Троцкій. *Методика ариѳметики для учителей среднихъ учебныхъ заведеній.* Изданіе 4-е, пересмотрѣнное. Стр. XVI + 524. Изданіе т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1916. Ц. 2 руб.

Вопросъ о коренной реформѣ самаго состава и содержанія курса ариѳметики въ средней школѣ въ этой книгѣ затрагивается лишь постольку, по-

сколько реформа эта соприкасается съ методой и пріемами обученія и поскольку она не требуетъ отъ учителя полнаго разрыва съ требованіями, установленными въ учебныхъ программахъ и планахъ среднихъ учебныхъ заведеній болѣе твердо, чѣмъ въ программахъ школъ начальныхъ. Автору пришлось считаться также съ весьма прочно установившимися и укоренившимися взглядами многихъ учителей среднихъ учебныхъ заведеній на содержаніе ариѳметики, какъ учебнаго предмета. Но само собою разумѣется, что сознаніе необходимости коренной реформы самаго содержанія учебнаго предмета не оставляетъ автора ни на одну минуту и красною нитью проходитъ черезъ всю эту книгу, какъ и черезъ „Методику ариѳметики для учителей начальныхъ школъ“ (см. выше), въ которой учитель средней школы, стремящійся къ реформѣ, можетъ быть, найдетъ болѣе матеріала, отвѣчающаго его чаяніямъ. Такъ, напримѣръ, недостаточно разработанными въ „Методикѣ для учителей среднихъ учебныхъ заведеній“ остались указанія относительно желательныхъ и въ средней школѣ способовъ примѣненія такъ называемой лабораторной методы къ обученію начальной математикѣ вообще и ариѳметикѣ въ частности, относительно включенія нѣкотораго геометрическаго матеріала въ курсъ ариѳметики, и т. п.

Метода обученія математикѣ, руководящая авторомъ въ его работахъ въ теченіе слишкомъ 30 лѣтъ, названа имъ въ свое время методою цѣлесообразныхъ задачъ. Она состоитъ въ томъ, что задачи являются точкою отправленія во всякій моментъ обученія. Но при этомъ слово „задача“ слѣдуетъ, держась этой методы понимать въ самомъ обширномъ смыслѣ этого слова.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей профессора Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 319 (6 сер.). Требуется опредѣлить съ точностью до секунды наибольшій отрицательный корень уравненія

$$\left(\arcsin \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \cot^2 x - 1,$$

при чемъ значеніе $\arcsin \operatorname{tg} x$ должно быть взято то, которое заключено въ предѣлахъ отъ $\frac{3}{2}\pi$ до 2π.

Ан. Б. (Одесса).

№ 320 (6 сер.). Даны точки M и N. На прямой MN уложить отрѣзокъ

XY такъ, чтобы точки X, M, Y, N были гармоническими, т. е. чтобы выполнялось соотношеніе

$$XN \,.\, MY = XM \,.\, YN.$$

И. Александровъ (Москва).

№ 321 (6 сер.). Въ данный круговой сегментъ вписать такой прямоугольникъ, чтобы объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія этого прямоугольника около стороны, перпендикулярной къ хордѣ, былъ maximum.

Г. Оганянцъ (Москва).

№ 322 (6 сер.). Доказать, что углы A, B, C всякаго треугольника удовлетворяютъ соотношенію

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C.$$

(Заимств).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 269 (6 сер.). *Дано, что сумма*

$$g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

даннаго числа n *функцій* $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots, g_n(x)$ *имѣетъ при неограниченномъ приближеніи* x *къ* a *предѣломъ данное число* c, *что каждая функція* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *при неограниченномъ приближеніи* x *къ* a *имѣетъ предѣломъ данное число* l *и что каждая изъ функцій* $g_i(x)$ *ограничена для значеній* x, *достаточно близкихъ къ* a, *т. е. что каждая изъ функцій* $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *удовлетворяетъ для значеній* x, *достаточно близкихъ къ* a, *неравенству* $|g_i(x)| < b$, *гдѣ* b — *данное число. Вычислить предѣлъ*

$$\lim_{x \to a} [g_1(x) f_1(x) + g_2(x) f_n(x) + \cdots + g_n(x) f_n(x)].$$

По условію

$$(1) \quad f_i(x) = l + \alpha_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

гдѣ $\alpha_i(x)$ суть безконечно малыя функціи при неограниченномъ приближеніи x къ a. Помножая равенства (1) соотвѣтственно на $g_i(x)$ и складывая, получимъ

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} g_i(x) f_i(x) = l \sum_{i=1}^{i=n} g_i(x) + \sum_{i=1}^{i=n} g_i(x)\, \alpha_i(x)$$

При вычисленіи предѣла лѣвой или правой части равенства (2) достаточно разсматривать лишь значенія x настолько близкія къ a, чтобы выполнялись неравенства

$$(3) \quad |g_i(x)| < b \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для такихъ значеній x справедливы [см. (3)] неравенства

$$(4)\quad \left|\sum_{i=1}^{i=n} g_i(x)\, a_i(x)\right| \leqq \sum_{i=1}^{i=n} |g_i(x)| \,.\, |a_i(x)| \leqq \sum_{i=1}^{i=n} b \,.\, |a_i(x)| \leqq b \sum_{i=n}^{i=n} |a_i(x)| \,.$$

Такъ какъ каждая изъ функцій $a_i(x)$ безконечно мала при неограниченномъ приближеніи x къ a, то и $|a_i(x)|$ суть при томъ же условіи безконечно малыя функціи, а потому и сумма ихъ $\sum_{i=1}^{i=n} |a_i(x)|$ есть безконечно малая функція, откуда слѣдуетъ, что и произведеніе $b\sum_{i=1}^{i=n} |a_i(x)|$ есть безконечно малая функція при неограниченномъ приближеніи x къ a. Но изъ формулъ (4) вытекаетъ, что для значеній x, достаточно близкихъ къ a, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} g_i(x)\, a_i(x)\right| \leqq b \sum_{i=1}^{i=n} |a_i(x)| \,.$$

Значитъ и выраженіе $\sum_{i=1}^{i=n} g_i(x)\, a_i(x)$ есть безконечно малая функція при неограниченномъ приближеніи x къ a, т. е.

$$(5)\quad \lim_{x \to a} \sum_{i=1}^{i=n} g_i(x)\, a_i(x) = 0.$$

Но по условію (6) $\lim\limits_{x \to a} \sum_{i=1}^{i=n} g_i(x) = c$, а потому изъ равенствъ (2), (5) и (6) находимъ, что

$$\lim_{x \to a} \sum_{i=1}^{i=n} g_i(x)\, f_i(x) = lc.$$

В. Поповъ (Валки, Харьк. губ.); *Н. Михальскій* (Екатеринославъ); *В. Ревзинъ* (Сумы).

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.